

N° d'ordre : 3469

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Discipline : Microondes et Microtechnologies

par

Frédéric BROYDÉ

Analyse des propriétés électromagnétiques
des écrans cylindriques,
et application à la caractérisation de
l'efficacité de blindage des câbles

soutenue le 16 juin 2004 devant la commission d'examen

Membres du jury	M. Renaud FAUQUEMBERGUE	Président
	M. Michel CAUTERMAN	Rapporteur
	M. Daniël DE ZUTTER	Rapporteur
	M. Bernard DÉMOULIN	Directeur de thèse
	M. Eric DELAHAYE	Invité

Remerciements

Je remercie tout particulièrement le Professeur Bernard Démoulin pour avoir depuis longtemps accordé de l'intérêt à mes travaux sur les couplages avec les câbles, pour m'avoir encouragé à entreprendre cette thèse, et pour avoir assumé les charges de directeur de thèse. Je remercie également le Professeur Pierre Degauque en sa qualité de directeur du laboratoire TELICE qui m'a accueilli pour cette thèse.

Je remercie le Professeur Renaud Fauquemberg, responsable de la formation doctorale en électronique, d'avoir aimablement traité les problèmes administratifs posés par un étudiant aussi tardif que moi, et je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance et de mon profond respect pour avoir bien voulu juger ce travail et assurer la présidence du Jury.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude au Professeur Daniël De Zutter, de l'Université de Gand, et au Professeur Michel Cauterman de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'assurer la tâche de rapporteur.

Mes remerciements vont également à Monsieur Eric Delahaye, du Centre d'Etudes de Gramat, qui a accepté de participer au jury et d'examiner cette thèse.

Les travaux présentés ici ont en grande partie été effectués au sein de la société Excem. Evelyne Clavelier, directeur général et ingénieur de cette société, a joué un rôle important dans le déroulement de la plupart des projets de recherche ayant permis de produire cette thèse, et je la remercie donc à ce titre. Je dois indiquer qu'Excem a financé une bonne partie des travaux sur fonds propres, pendant plus de dix ans, et en particulier sur la période 1996 à 2004.

Ces travaux ont également reçu un soutien essentiel de la Délégation Générale pour l'Armement (D.G.A.) entre 1992 et 1996, que je remercie pour l'aide morale et pour les commandes et marchés passés à Excem. Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude envers M. Jean-Paul Caillou, qui était pendant cette période chef de section à l'établissement technique central de l'armement (E.T.C.A.) de la D.G.A., qui a su dynamiser les recherches sur

les couplages avec les câbles, et qui a permis que des études sur la caractérisation des câbles blindés me soient confiées à travers Excem. Je dois aussi, avec émotion, remercier, à titre posthume, MM. Daniel Negret et Jean-Claude Biotteau du Centre d'Etudes de Gramat (C.E.G.) de la D.G.A., qui ont permis le déroulement de deux études d'Excem à cette époque. Enfin, je souhaite remercier MM. Jean-Luc Fauquembergue et Pierre Bruguière, du C.E.G., qui m'ont autorisé en 2003 à utiliser et publier les résultats obtenus par Excem pour le compte de la D.G.A. dans le domaine des couplages avec les liaisons filaires.

SOMMAIRE

page

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Considérations basées sur les symétries	6
1.1 Introduction	6
1.2 Les cinq principaux types de couplage	7
1.3 Câbles présentant la symétrie du cylindre de révolution	8
1.4 Câbles possédant un bon écran cylindrique de révolution	9
1.5 Câbles ne possédant pas la symétrie cylindrique	14
1.6 Evaluation des paramètres de couplages	15
1.7 Exemple de calcul de couplage champ-à-câble élémentaire	18
1.7.1 Préambule	18
1.7.2 Calcul de la distribution de charge pour l'excitation longitudinale	19
1.7.3 Couplage champ-à-câble élémentaire en excitation transversale	22
1.7.4 Couplage champ-à-câble élémentaire en excitation longitudinale	23
1.8 Comparaison des signaux couplés par les différents types de couplage	23
1.9 Conclusion	25
Chapitre 2 : Types de réponse de l'écran cylindrique	26
2.1 Introduction	26
2.2 Notation pour l'utilisation de coordonnées curvilignes	27
2.3 Courants sur l'écran généralisé et conservation de charge	29
2.4 Définition des types de réponse	34
2.5 Réponses standards indépendantes	38
2.6 Méthode générale de calcul des réponses standards	41
2.7 Cas d'un bord externe cylindrique de révolution	42
2.8 Cas d'un bord externe cylindrique à section droite elliptique	43
2.9 Cas d'un bord externe cylindrique à section droite rectangulaire	45
2.10 Conclusion	48
Chapitre 3 : Utilisation des quaternions	49
3.1 Introduction	49
3.2 La formule hypercomplexe de conservation de la charge sur l'écran isolé	49

3.3	Passage incorrect dans le domaine fréquentiel	53
3.4	Utilisation d'une transformée de Fourier complexe	54
3.5	Définition alternative des amplitudes complexes	55
3.6	Comparaison avec l'utilisation des amplitudes hypercomplexes	56
3.7	Amplitudes hypercomplexes pour les ondes cylindriques	58
3.8	Cas du cylindre de révolution	60
3.9	Conclusion	63
Chapitre 4	: Types d'excitation de l'écran cylindrique	64
4.1	Introduction	64
4.2	Définition des types d'excitation	64
4.3	Excitations standards pour un bord externe cylindrique de révolution	65
4.4	Combinaisons simples d'excitations standards pour le bord de révolution	67
4.5	Génération des excitations standards pour le bord de révolution	68
4.6	Excitations standards pour un bord externe autre que de révolution	72
4.6.1	Bord externe à section droite elliptique	72
4.6.2	Bord externe à section droite rectangulaire	73
4.7	Choix de la définition du bord externe pour un écran généralisé	73
4.8	Amplitude naturelle d'une excitation standard	76
4.9	Discussion des sources et des champs appliqués	80
4.10	Conclusion	82
Chapitre 5	: Caractérisation des écrans cylindriques	84
5.1	Introduction	84
5.2	Action des champs extérieurs à l'intérieur	86
5.3	Caractérisation de l'écran généralisé avec la matrice d'écrantage	90
5.4	Caractérisation de l'écran généralisé pour l'émission	92
5.5	Caractérisation des câbles blindés pour l'action de champs extérieurs	93
5.6	Les cinq principaux types de couplage	96
5.7	Caractérisation des câbles blindés pour l'émission	98
5.8	Conclusion	102
Chapitre 6	: Traitement de problèmes canoniques	104
6.1	Introduction	104
6.2	Potentiel complexe d'un cylindre conducteur au-dessus d'un plan de masse	105
6.3	Amplitudes naturelles pour l'écran au-dessus d'un plan de masse	110

6.4 Action de champs extérieurs sur un câble court posé sur le plan de masse	111
6.5 Emission par un câble court en espace libre	113
6.6 Emission par la charge globale d'un câble court	115
6.7 Conclusion	116
Chapitre 7 : Méthodes pour caractériser l'écrantage des câbles	117
7.1 Introduction	117
7.2 Théorie élémentaire du banc triaxial	117
7.3 Mesure de Z_T avec le banc triaxial	119
7.4 Mesure de ζ_R avec le banc triaxial	121
7.5 Mesure de l'impédance de Z_{AT} avec la sonde à champ H axial	124
7.6 Mesure de Y_{AT} avec la sonde à champ E parallèle	126
7.7 Mesure de Z_{PT} avec la sonde à champ H parallèle	129
7.8 Définition et utilisation des étalons	131
7.8.1 Définition de l'étalon ZT	131
7.8.2 Définition de l'étalon ZAT	131
7.8.3 Définition de l'étalon YPT	132
7.8.4 Définition de l'étalon ZPT	133
7.9 Conclusion	134
Chapitre 8 : Résultats expérimentaux	135
8.1 Introduction	135
8.2 Définition des échantillons	135
8.3 Mesures pour la caractérisation des échantillons	137
8.3.1 Méthodes de mesure et remarques générales	137
8.3.2 Mesures pour le couplage de type 1	138
8.3.3 Résultats pour le couplage de type 2	139
8.3.4 Résultats pour le couplage de type 3	139
8.3.5 Résultats pour le couplage de type 4	141
8.3.6 Résultats pour le couplage de type 5	141
8.3.7 Figures	142
8.4 Discussion des résultats sur la caractérisation des échantillon	155
8.4.1 Discussion pour le couplage de type 1	155
8.4.2 Discussion pour le couplage de type 2	156
8.4.3 Discussion pour le couplage de type 3	157
8.4.4 Discussion pour le couplage de type 4	158

8.4.5 Discussion pour le couplage de type 5	158
8.5 Résultats attendus pour l'illumination en onde plane	159
8.6 Définition des mesures en cellule TEM	160
8.7 Résultats expérimentaux en cellule TEM	162
8.8 Conclusion	168
Conclusion générale	170
Bibliographie	173
Annexe A : Notions sur les quaternions	181
A.1 Définitions usuelles	181
A.2 Définitions et résultats particuliers	182
Annexe B : Sources induisant une réponse tangentielle donnée	184
Annexe C : Utilisation des potentiels complexes	187
C.1 Potentiels et fonction flux dans les problèmes à deux variables	187
C.2 Définition du potentiel complexe	188
C.3 Potentiel complexe des distributions multipôles	189
C.4 Potentiel prenant une valeur donnée sur un cylindre donné	189
C.5 Utilisation de transformations conformes	191
C.6 Utilisation d'une transformation de Schwarz-Christoffel	192
C.7 Utilisation d'une inversion analytique	193
Annexe D : A propos de linéarité	194
D.1 Les trois linéarités	194
D.2 La linéarité intervenant dans les problèmes d'écrantage	195
D.3 Amplitudes hypercomplexes sans la linéarité hypercomplexe	195

Introduction générale

Les spécifications relatives à la compatibilité électromagnétique (CEM) d'un système peuvent découler de l'application de règlements (en relation avec des normes) ou d'autres contraintes, par exemple des spécifications propres du constructeur, ou des demandes du client. De telles contraintes particulières pourraient résulter d'une étude d'impact ayant pris en compte la CEM, qui aurait montré que, sans précautions particulières, le système pourrait perturber d'autres entités, c'est-à-dire présenter une émission excessive, par conduction et/ou par rayonnement. Ces contraintes pourraient aussi provenir d'une étude de l'environnement électromagnétique que devra supporter le système, concluant que celui-ci pourrait ne pas bien le supporter, c'est-à-dire avoir une immunité insuffisante, vis-à-vis des perturbations conduites et/ou rayonnées.

Si nous supposons connues les caractéristiques de CEM des différentes parties électroniques (cartes, modules, appareils) du système et les règles d'installations prévues, la spécification de la CEM du système va impliquer des contraintes de CEM sur les filtres, sur les faradisations (de locaux, d'appareils), et sur les interconnexions. Dans le cas de systèmes présentant des liaisons électriques longues, il est connu que celles-ci peuvent jouer un rôle prépondérant dans les couplages responsables de l'émission ou du manque d'immunité [50]. Elles méritent donc une attention particulière, par exemple l'utilisation de techniques permettant de réduire les couplages. Une de ces techniques est l'emploi de câbles blindés, aussi appelés câbles écrantés. Une autre de ces techniques est l'emploi d'écrans électromagnétiques, constitués par exemple de goulottes métalliques, entourant des câbles. Le but des premières études qui ont conduit à des résultats nouveaux exposés dans cette thèse était la caractérisation des performances électromagnétiques de ces deux techniques, dans le contexte de la protection d'interconnexion contre des agressions électromagnétiques extérieures. Cependant, cette thèse présentera une analyse plus générale des propriétés électromagnétiques des écrans cylindriques, et son application à la caractérisation de l'efficacité de blindage des câbles. Cette caractérisation, utilisant des paramètres pour cinq types de couplage, est l'un des éléments de base de la prédiction de la captation des champs électromagnétiques par les câblages, de l'émission rayonnée des câbles, et de la diaphonie entre câbles.

Cette thèse ne traitera pas en détail de certains autres aspects utiles à cette prédiction. Par exemple, nous n'aborderons pas la modélisation de systèmes complexes de câbles et d'appareils, utilisant comme données les paramètres pour ces cinq types de couplage. Par exemple, nous ne

chercherons pas à calculer ces paramètres, à partir de la connaissance de la structure d'un câble et des caractéristiques des matériaux qui le constituent.

Le premier à avoir véritablement abordé la question de la caractérisation des écrans cylindriques et ses applications aux câbles est S.A. Schelkunoff qui a, en 1934, proposé [2] un modèle pour l'efficacité de blindage des câbles coaxiaux et des coques cylindriques. Ce modèle est limité au cas des écrans homogènes (c'est-à-dire des écrans d'épaisseur constante constitués d'un milieu conducteur de conductivité et de perméabilité indépendante du point de l'écran), et cylindriques de révolution. Les caractéristiques d'écrantage d'un câble coaxial à écran homogène y sont représentées par un unique paramètre, que nous appellerons *impédance linéique de transfert*, ("per-unit-length transfer impedance" en anglais) mais qui a également été appelé *impédance de transfert* en français et *transfer impedance* ou *surface transfer impedance* en anglais. Ce paramètre rend compte du phénomène de diffusion, à travers l'écran, d'un courant axial, ou, ce qui revient au même, d'un champ magnétique azimutal.

Des travaux ont ultérieurement permis de modéliser les câbles à écran inhomogène. Le cas du câble coaxial à écran tressé a en particulier été traité en 1975 dans un article de E.F. Vance [14] et dans un article de K.H.S. Lee et C.E. Baum [15]. L'un et l'autre décrivent les caractéristiques d'écrantage du câble coaxial à écran inhomogène avec deux paramètres, qui peuvent être calculés à partir de quantités caractéristiques de la constitution de la tresse, en combinant la théorie du phénomène de diffusion avec celle du couplage à travers une ouverture dans un écran parfaitement conducteur, par diffraction. Les paramètres utilisés par Vance, à savoir une *impédance linéique de transfert* et une *admittance linéique de transfert* ("per-unit-length transfer admittance" en anglais) ont été les plus largement adoptés par la postérité, bien que l'admittance linéique de transfert dépende à la fois du câble et du dispositif expérimental, et qu'il soit préférable d'utiliser le paramètre *élastance de transfert* ("through elastance" en anglais) [29] ou bien une autre propriété intrinsèque du câble permettant de calculer l'admittance linéique de transfert dans une configuration donnée. Il est cependant apparu que les seuls phénomènes de diffusion et de diffraction ne permettent pas de rendre compte des résultats expérimentaux obtenus pour les différents types de tresse, notamment de la dépendance de l'impédance linéique de transfert en fonction de la fréquence. B. Démoulin introduisit en 1981 [21] [22] [33, § 6.3.2.3] un terme supplémentaire, dit "d'induction" ou de "marsouinage", dans l'expression de l'impédance linéique de transfert, permettant de rendre compte des caractéristiques des câbles coaxiaux tressés réels avec des expressions analytiques. D'autres modèles de câble coaxial à écran tressé ont également été proposés [51, § 9.4.6].

Il a généralement été admis que les performances d'écrantage d'un câble coaxial à écran inhomogène de structure quelconque peuvent aussi être caractérisées avec seulement une impédance linéique de transfert et une élastance de transfert. Par exemple, des expressions analytiques de ces paramètres ont pu être déterminées pour les écrans constitués d'un ruban conducteur hélicoïdal [33, § 6.3.3]. De telles formules, de même que celles applicables aux écrans tressés, sont essentielles pour le fabricant de câbles, puisqu'elles expliquent les performances de certains câbles coaxiaux. L'existence de ce type de formule est par contre peu important pour l'utilisateur de câbles, par exemple un concepteur en électronique devant choisir un câble pour une liaison, puisqu'il est de son point de vue plus logique de spécifier et de mesurer directement les paramètres caractérisant les propriétés d'écrantage du câble coaxial.

Il est surprenant de constater que la littérature traitant véritablement de la caractérisation de l'écrantage des câbles multiconducteurs écrantés est bien moins abondante que celle concernant les câbles coaxiaux, alors que le problème semble plus complexe, et que les câbles multiconducteurs écrantés sont très largement utilisés en électronique, en particulier pour les liaisons entre équipements et dans les réseaux de communication. En 1974, S. Frankel [13] a proposé un modèle pour ces câbles, comportant $2N$ paramètres pour N conducteurs internes. Ce modèle peut être vu comme la transposition directe de celui disponible à cette époque pour le câble coaxial, en prenant en compte la pluralité des conducteurs internes, et les couplages entre ceux-ci. Il ne mettait donc pas en évidence de phénomène nouveau apparaissant sur les câbles multiconducteurs. A la fin des années 1980, B. Démoulin a étudié expérimentalement les amplitudes des signaux couplés en mode différentiel et de ceux couplés en mode commun sur les conducteurs internes des paires blindées [26] [33, § 6.5], et mis en évidence des propriétés inconnues. Ce travail peut être vu comme le premier ayant vraiment abordé les propriétés particulières distinguant l'étude des câbles multiconducteurs blindés de celle des câbles coaxiaux. Toutefois, les impédances linéiques de transfert en mode différentiel et en mode commun qu'il définit peuvent être converties en deux valeurs d'impédance linéique de transfert (et vice-versa), pourvu que les combinaisons linéaires soient bien effectuées sur les grandeurs complexes.

A ce stade, la caractérisation des câbles multiconducteurs blindés prenait donc en compte les effets d'un courant axial, par le paramètre impédance linéique de transfert, et l'effet d'un champ électrique radial, par le paramètre élastance de transfert, étant bien entendu qu'il est *a priori* nécessaire d'envisager autant d'impédances linéiques de transfert et d'élastances de transfert qu'il y a de conducteurs internes, et que la connaissance de la phase est très importante. Considérant que, pour des câbles multiconducteurs blindés, il n'était pas forcément légitime de ne prendre en compte que les effets d'un courant axial et d'un champ électrique radial, l'auteur

a introduit avec E. Clavelier, dans un article [39] publié en 1993, l'idée que cinq paramètres étaient en fait nécessaires, respectivement pour le courant axial, le champ électrique radial, le champ magnétique axial, le champ électrique orthogonal à l'axe du câble, et le champ magnétique orthogonal à l'axe du câble. C'est ce concept qui sera développé cette thèse, en adoptant plutôt le point de vue de l'utilisateur de câble, déjà évoqué.

Le chapitre 1 expose pourquoi il semble nécessaire de considérer au moins cinq types de couplage, en utilisant l'approche intuitive de cet article de 1993, basée sur des considérations de symétrie. L'article comportait une partie théorique et une partie expérimentale, mais cette dernière était peu élaborée. Par la suite, un travail a été accompli sur les méthodes de mesure [41] [43] [45] des paramètres correspondant aux trois types de couplage exotiques, à savoir "l'impédance de transfert axial" pour le champ magnétique axial, "l'admittance de transfert parallèle" pour le champ électrique orthogonal à l'axe du câble, et "l'impédance de transfert parallèle" pour le champ magnétique orthogonal à l'axe du câble. L'objet de ces méthodes de mesures locales, qui seront décrites aux chapitres 7 et 8, était de caractériser le câble sur une longueur de seulement quelques centimètres, pour un seul type de couplage. Peu après, l'auteur a pu procéder, avec l'aide du Centre d'Études de Gramat, à des mesures globales au cours desquelles un échantillon de câble était entièrement soumis à une onde TEM. Ces expériences ont confirmé [46] [47] qu'il était nécessaire de prendre en compte les cinq types de couplage. Cette validation expérimentale sera exposée au chapitre 8.

Plus récemment, en 2000 et 2002, des travaux théoriques [53] [56] [58] ont été publiés, permettant de comprendre en quoi les cinq types de couplages, qui avaient été pris en compte sur la base de considérations de symétrie, n'étaient que les premiers termes d'un développement plus général. Certains calculs présentés dans ces articles sont difficiles sur le plan mathématique (emploi de coordonnées curvilignes, d'amplitudes hypercomplexes, manipulations de potentiels électriques complexes). Aussi, leur présentation est-elle répartie sur les chapitres 2, 4 et 5. De plus, pour éclaircir ces questions, les explications inédites du chapitre 3 sur l'utilisation des quaternions ont été incorporées dans cette thèse [61]. Si le lecteur n'est pas intéressé par une justification théorique détaillée de l'utilisation des cinq principaux types de couplage, il pourra sauter les chapitres 2 à 4 et se limiter à l'étude du chapitre 5, qui a été écrit de façon à être largement autonome, et qui définit la matrice d'écrantage (permettant de caractériser les écrans cylindriques), sa relation avec les paramètres pour les cinq principaux types de couplage (permettant de caractériser les câbles multiconducteurs), et leur emploi pour aborder les problèmes d'action de champs extérieurs et les problèmes d'émission.

Le chapitre 6, dans lequel nous traitons quelques problèmes canoniques, constitue une synthèse pour l'application de cette thèse, puisqu'il détaille l'application des concepts du chapitre 5 à quelques problèmes simples et importants. D'une part, ce chapitre traitant le problème du câble court illuminé par une onde TEM, c'est lui qui nous permet de comparer les résultats des mesures locales à ceux des mesures globales, donc de valider l'approche des cinq principaux types de couplage, au chapitre 8. D'autre part, c'est en généralisant les calculs de ce chapitre que cette approche pourra être utilisée pour aborder des situations plus complexes.

Chapitre 1 : Considérations basées sur les symétries

1.1 Introduction

Depuis les travaux de Schelkunoff dans les années 30, on a assisté à un effort considérable pour la modélisation et la mesure des caractéristiques d'écrantage des câbles coaxiaux. Il est à présent bien établi que, jusqu'à 3 GHz, la meilleure façon de caractériser un câble coaxial est de déterminer son impédance linéique de transfert (certains auteurs disent simplement "impédance de transfert") et son élastance de transfert ("through elastance" en anglais) [29] [34], cette dernière quantité permettant de déterminer l'admittance linéique de transfert dans un montage donné.

Dans cette thèse, nous considérerons des câbles multiconducteurs ayant au moins un conducteur interne, et un seul écran, le cas du câble coaxial étant donc un cas particulier. Dans ce chapitre, nous nous limiterons également à des câbles de section circulaire, ou approximativement circulaire. Les idées présentées ici seront étendues à des câbles de section quelconque au chapitre 5, fort simplement d'ailleurs. Plusieurs auteurs ont déjà développé des concepts et des techniques de mesure pour les câbles multiconducteurs écrantés. En particulier, B. Démoulin a introduit [26] [33, § 6.5], pour une paire blindée, les concepts d'impédance linéique de transfert en mode commun et d'impédance linéique de transfert en mode différentiel, et ont mesuré directement ces quantités. Quoique la mesure directe de ces deux paramètres ait un intérêt pratique (l'expérimentateur évite ainsi que le plus grand, celui que l'on mesure en mode commun, ne masque l'autre), ces paramètres ne correspondent pas à des phénomènes de couplage différents de ceux qui sont pris en compte lorsque l'on considère l'impédance linéique de transfert d'un câble coaxial : la cause considérée est toujours un courant axial, accompagné d'un champ magnétique azimutal.

Nous allons donc, dans les § 1.2 à § 1.5 suivants, voir qu'il est *a priori* nécessaire de prendre d'autres phénomènes de couplage en compte, et définir les paramètres caractérisant le câble pour chacun de ces principaux types de couplage. Au § 1.6, nous calculerons certains de ces paramètres pour des structures simples particulières de câble. Au § 1.7 nous verrons comment la connaissance de ces paramètres nous permet de calculer les tensions induites sur les conducteurs internes d'une section électriquement courte d'un câble multiconducteur soumis à une agression électromagnétique extérieure.

1.2 Les cinq principaux types de couplage

Si nous considérons une très courte section de câble écranté, soumise à des agressions électromagnétiques extérieures, quelles sont les configurations les plus simples que nous pouvons retenir? Nous pouvons penser aux configurations dans lesquelles l'agression est un champ appliqué homogène, causé par des courants et des charges éloignées, et aussi aux configurations dans lesquelles l'agression est causée par des courants ou des charges sur le câble. Selon cette approche, les configurations simples sont au nombre de six :

- (a) une agression par un champ électrique longitudinal homogène,
- (b) une agression par un champ électrique homogène transversal,
- (c) une agression par un champ magnétique homogène longitudinal,
- (d) une agression par un champ magnétique homogène transversal,
- (e) une agression par une charge globale apparaissant sur le câble,
- (f) une agression par un courant circulant le long du câble.

Toutefois, nous constatons que l'injection de courant n'est pas une agression indépendante, car elle correspond à l'application d'un champ électrique longitudinal. Par contre, nous pouvons concevoir facilement des dispositifs imaginaires capables chacun de produire une seule des cinq autres agressions sur la très petite section de câble. Ces cinq agressions sont donc localement indépendantes, même si, sur une plus grande longueur de câble, courants et charges doivent être considérés comme liés par la relation de conservation de la charge. Il est donc clair qu'en se limitant aux agressions les plus simples, il faut *a priori* prendre en compte cinq types de couplage, que nous appellerons les cinq principaux types de couplage. Selon la terminologie introduite voici quelques années :

- le couplage de type 1 correspond aux configurations (a) et (f) ;
- le couplage de type 2 correspond à la configuration (e) ;
- le couplage de type 3 correspond à la configuration (c) ;
- le couplage de type 4 correspond à la configuration (b) ;
- le couplage de type 5 correspond aux configurations (d).

Les couplages de type 1 et de type 2 ayant été abondamment étudiés [28, ch. 5] [33, ch. 6] avant 1990, nous appellerons *couplages exotiques* les couplages de type 3, de type 4 et de type 5 définis en 1993 dans [39].

1.3 Câbles présentant la symétrie du cylindre de révolution

Considérons un câble multiconducteur avec un écran unique, caractérisé par une symétrie cylindrique parfaite (symétrie cylindrique signifie ici la symétrie du cylindre de révolution), mais pouvant présenter toutes les limitations que peuvent avoir les câbles réels [33, § 6.3.2] [34] [51, § 9.4.6] : couplage par diffusion, couplage par les ouvertures, couplage par marsouinage (nous utilisons ce terme comme équivalent du "porpoising coupling" de la littérature américaine). En fait, la symétrie impose que ce câble soit coaxial. Que pouvons nous dire des couplages susceptibles de s'établir à travers l'écran du câble ?

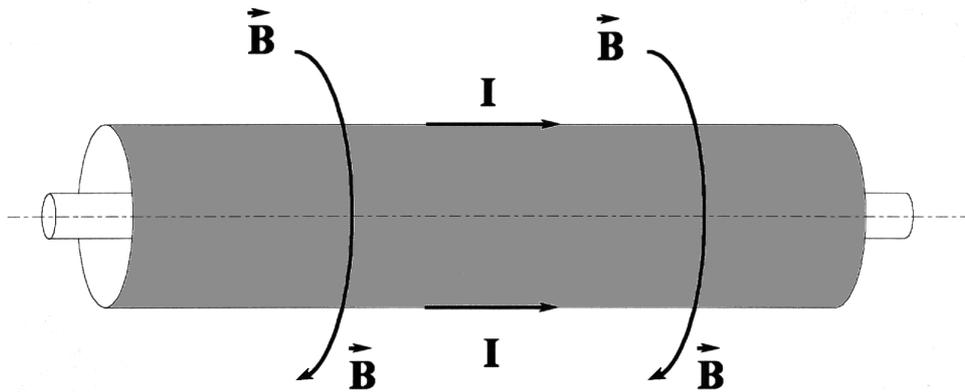


Fig. 1-1: couplage de type 1 sur un câble coaxial

La figure 1-1 montre ce que nous appellerons le couplage de type 1 sur le câble coaxial : un courant de mode commun circule le long de l'écran du câble, qui est entouré par un champ magnétique azimutal. Comme nous le savons, le câble est complètement caractérisé pour ce couplage par son impédance linéique de transfert Z_T (exprimée en Ω/m), qui établit une relation entre la tension interne dv par unité de longueur dz et le courant de mode commun i_{MC} :

$$dv = Z_T i_{MC} dz \quad (1-1)$$

La figure 1-2 montre ce que nous appellerons le couplage de type 2 sur le câble coaxial : des charges apparaissent à la surface du câble, qui est entouré par un champ électrique radial. Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, le comportement du câble dans cette situation est caractérisé par une élastance de transfert, ou encore par une admittance linéique de transfert Y_T (exprimée en S/m). Cette dernière n'étant pas uniquement une caractéristique du câble, il est préférable d'éviter son emploi lorsque l'on cherche à caractériser le câble. Par contre, l'élastance de transfert est bien une propriété intrinsèque du câble. Malheureusement, sa définition ne peut pas s'étendre aux câbles multiconducteurs. Nous préférons donc utiliser [39] [40] le coefficient de couplage électrique radial ζ_r du câble qui est une quantité sans dimension définie par :

$$\zeta_R = \frac{Y_T}{j\omega C_1} \quad (1-2)$$

où C_1 est la capacité linéique du circuit extérieur que l'on doit employer pour mesurer Y_T , et où ω est la pulsation. Les expressions obtenues par Vance [28, p. 133] montrent que ce coefficient de couplage électrique radial présente les avantages d'être une quantité dépendant uniquement du câble, et d'avoir une signification physique claire : il peut s'interpréter comme le rapport entre le courant di injecté par unité de longueur dz dans le conducteur central du câble, et le courant de déplacement $j\omega dq_0$ collecté par l'écran. Nous avons donc :

$$di = j\omega \zeta_R dq_0 \quad (1-3)$$

où dq_0 est la charge globale sur l'élément de longueur dx .

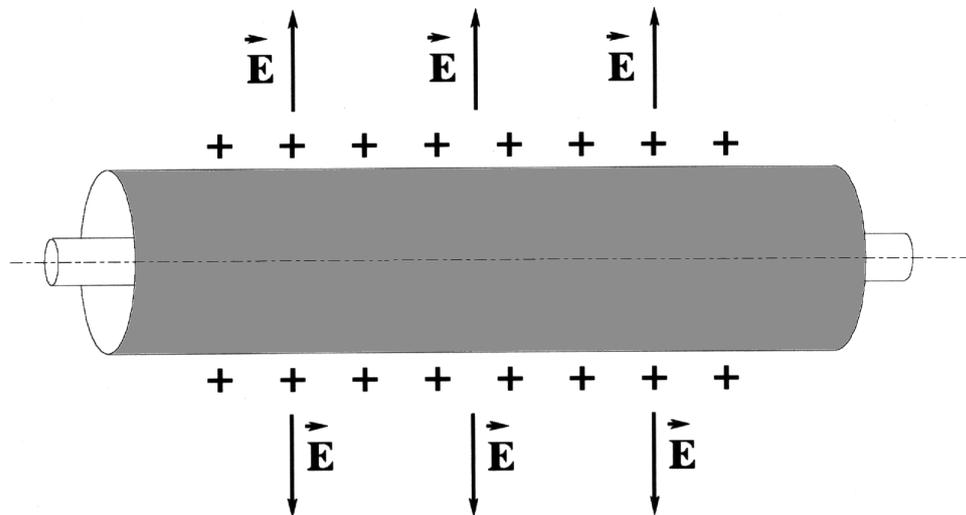


Fig. 1-2 : couplage de type 2 sur un câble coaxial

Du fait de la symétrie supposée pour le câble, les couplages de type 3, de type 4 et de type 5 sont évidemment sans effet sur ce câble.

1.4 Câbles possédant un bon écran cylindrique de révolution

Nous considérons un câble multifilaire écranté pouvant contenir un nombre entier positif N quelconque de conducteurs internes (ce qui inclut donc les câbles coaxiaux). Dans un premier temps nous postulons les deux hypothèses suivantes :

- l'écran présente une symétrie cylindrique parfaite ;
- l'écran est efficace : par cet adjectif nous entendons que l'écran offre suffisamment d'écrantage pour que l'approximation de couplage faible soit applicable.

Selon l'approximation de couplage faible, une excitation appliquée d'un côté de l'écran (côté

1) peut avoir des effets sur les courants et les charges de l'autre côté de l'écran (côté 2), mais ces effets ont eux-mêmes des conséquences négligeables sur les courants et les charges du côté où l'excitation est appliquée (côté 1). Ainsi, quoique le câble ne jouisse pas de la symétrie cylindrique, dans le cas d'une excitation externe les courants sur l'écran s'établissent comme si la symétrie cylindrique était présente. Notons que la première de nos deux hypothèses sera supprimée au § 1.5.

Avec ces deux hypothèses, nous pouvons définir cinq différents types de couplage. Ces couplages peuvent être expliqués avec des figures qui représentent une paire écrantée non torsadée, ayant trois plans de symétrie deux à deux orthogonaux évidents. Cette représentation a été utilisée pour la simplicité et la clarté de nos dessins, mais le câble considéré peut avoir n'importe quel nombre de conducteurs internes, et aucune symétrie n'est supposée pour ceux-ci.

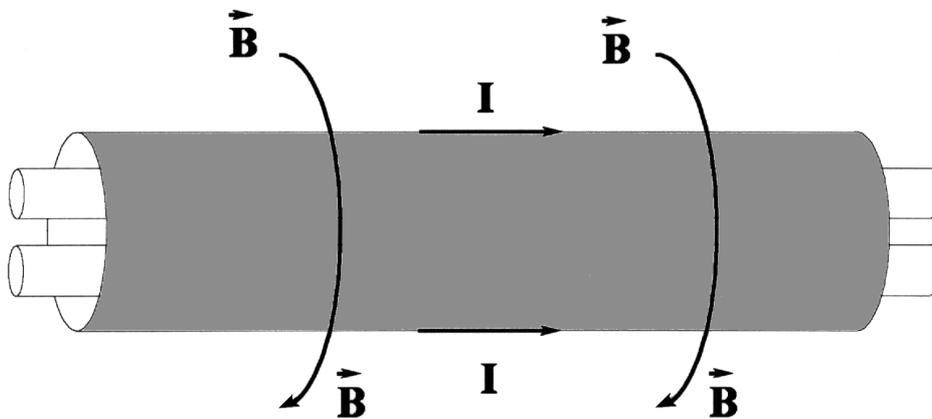


Fig. 1-3 : couplage de type 1 sur un câble multiconducteur écranté

La figure 1-3 illustre le couplage de type 1. Un courant circule le long de l'écran du câble, qui est par conséquent entouré par un champ magnétique azimuthal. Les caractéristiques du câble pour ce couplage peuvent être décrites avec N impédances linéiques de transfert complexes (une pour chaque conducteur interne). Il faut insister sur le fait qu'il convient de considérer des quantités complexes, car les relations de phase entre les tensions induites sur les différents conducteurs sont extrêmement importantes. Par exemple dans le cas $N = 2$, deux tensions en phase sont en mode commun, tandis que deux tensions avec un déphasage de π sont en mode différentiel : leurs effets possibles sur des dispositifs susceptibles sont différents, tout comme les techniques de protection applicables. Le couplage de type 1 produit, sur une longueur élémentaire dz de câble, l'apparition, sur le conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = Z_{T\alpha} i_{MC} dz \quad (1-4)$$

où $Z_{T\alpha}$ est l'impédance linéique de transfert pour le conducteur α et où i_{MC} est le courant sur

l'écran excitateur sur l'écran du câble.

La figure 1-4 illustre le couplage de type 2. Le comportement du câble peut être caractérisé, pour ce type de couplage, avec N coefficients de couplage électrique radial, qui ne dépendent que du câble. Le couplage de type 2 produit, sur une longueur élémentaire dz de câble où s'accumule la charge dq_0 , l'apparition, sur le conducteur interne α , d'un courant di_α égal à :

$$di_\alpha = j\omega \zeta_{R\alpha} dq_0 \quad (1-5)$$

où $\zeta_{R\alpha}$ est le *coefficient de couplage électrique radial* pour le conducteur α et ω la pulsation.

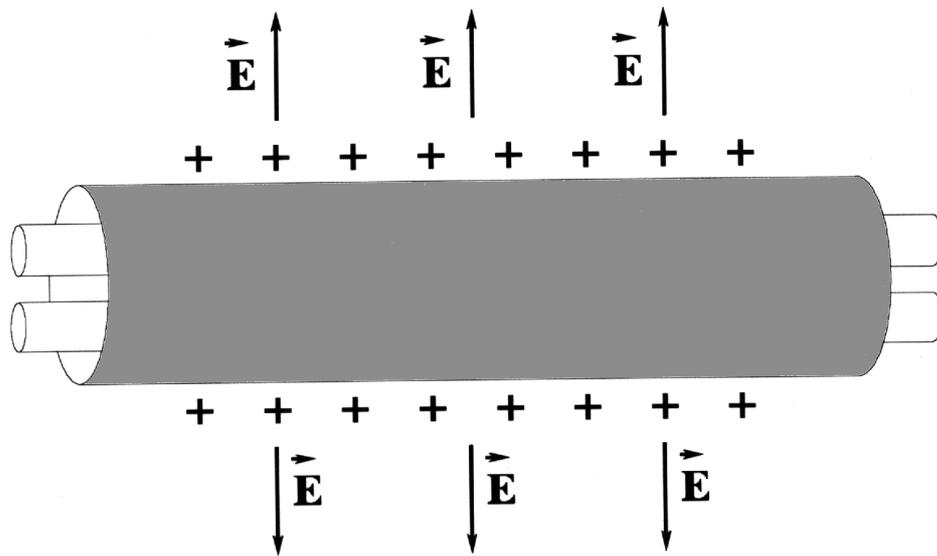


Fig. 1-4 : couplage de type 2 sur un câble multiconducteur écrané

La figure 1-5 illustre le couplage de type 3. Nous sommes en présence d'un courant azimutal, et le champ magnétique est axial. C'est typiquement ce que l'on observerait si l'on plaçait le câble sur l'axe d'un solénoïde. Le couplage avec les conducteurs internes ne se produira pas si ceux-ci sont rectilignes. Toutefois, il est clair qu'une tension sera induite sur des conducteurs hélicoïdaux, l'exemple le plus évident étant une paire torsadée.

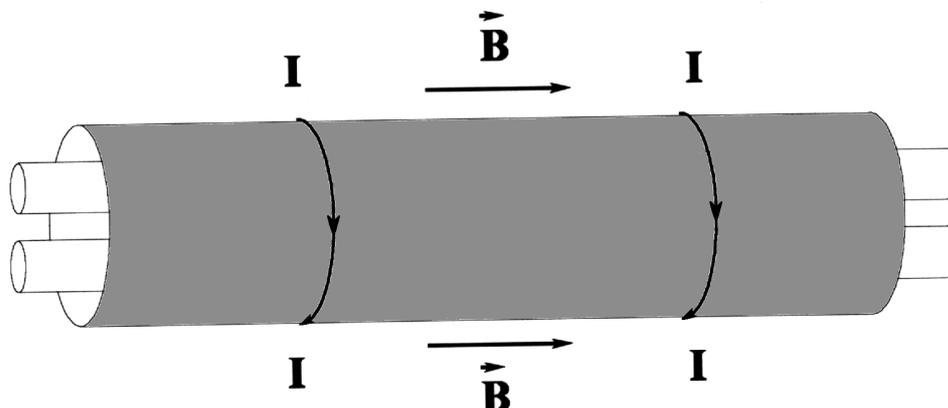


Fig. 1-5 : couplage de type 3 sur un câble multiconducteur écrané

Ici, il n'est pas naturel de relier la tension induite au courant. Nous préférons introduire une quantité qui lie la tension induite, par unité de longueur, sur un conducteur spécifié, au champ magnétique axial \mathbf{H} . Nous appelons cette quantité l'*impédance de transfert axial*. Elle s'exprime en Ω , et nous avons besoin de N impédances de transfert axial pour caractériser le câble à l'égard du couplage de type 3. Le couplage de type 3 produit, pour une longueur élémentaire dz de câble, l'apparition sur le conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = Z_{AT\alpha} H_z dz \quad (1-6)$$

où $Z_{AT\alpha}$ est l'impédance de transfert axial pour le conducteur α , et où H_z est l'intensité du champ magnétique axial.

La figure 1-6 illustre le couplage de type 4. Un champ électrique homogène est orthogonal à l'axe du câble, son orientation étant telle autour du câble, qu'il ne produit pas de charge nette le long du câble. C'est ce qui se produirait si le câble était introduit au centre de deux plaques parallèles excitées par une source de tension symétrique.

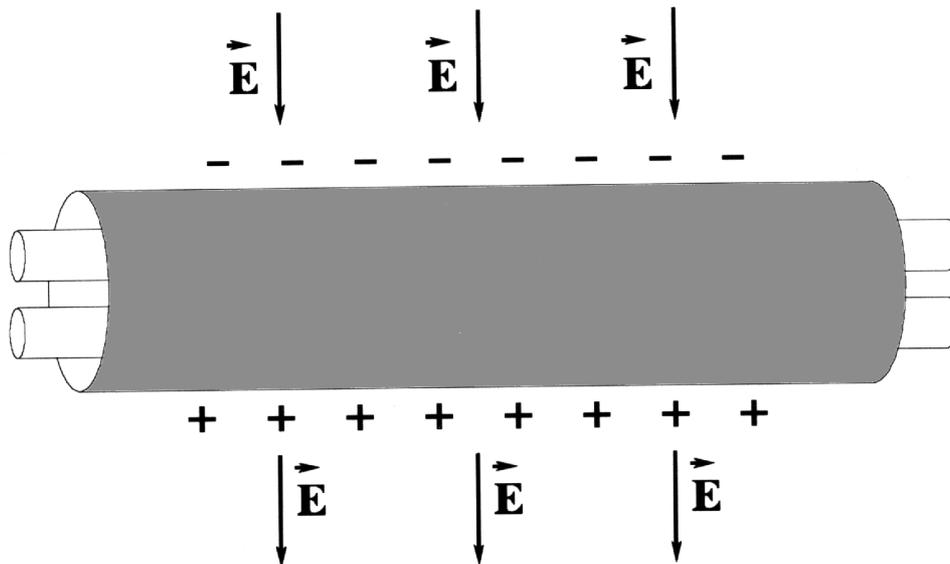


Fig. 1-6 : couplage de type 4 sur un câble multiconducteur écrané

Par exemple, si nous considérons la configuration présentée sur la figure 1-4, avec deux conducteurs internes rectilignes, et si nous supposons une parfaite invariance par symétrie avec inversion de charge, par rapport au plan médian des deux conducteurs internes, alors le couplage de type 4 produit un courant purement en mode différentiel (nous supposons que les conducteurs internes sont terminés sur des charges symétriques) ; ceci est totalement différent de ce que donnerait le couplage de type 2, qui, avec les mêmes hypothèses, produirait un courant purement en mode commun sur les conducteurs internes. Il est naturel [49] de décrire ce couplage avec une quantité qui rapporte le courant reçu par unité de longueur par un des conducteurs internes, au

champ électrique homogène parallèle à la section droite du câble (c'est-à-dire orthogonal au câble). Nous appelons cette quantité, qui s'exprime en S, l'*admittance de transfert parallèle*. Nous avons besoin de N admittances de transfert parallèle pour caractériser le câble vis-à-vis du couplage de type 4, mais il faut préciser que celles-ci sont *a priori* dépendantes de l'orientation du champ électrique. Si nous notons E_{\perp} la composante du champ électrique parallèle à la section droite du câble, cette excitation pourra induire, sur une longueur élémentaire dz de câble, sur le conducteur interne α , un courant di_{α} égal à :

$$di_{\alpha} = Y_{PT\alpha} E_{\perp} dz \quad (1-7)$$

où $Y_{PT\alpha}$ est l'admittance de transfert parallèle pour le conducteur α , dans la direction du champ électrique appliqué. Nous notons que le champ appliqué produit sur le câble une charge nulle par unité de longueur, résultant de la compensation exacte de deux charges opposées de part et d'autre du câble.

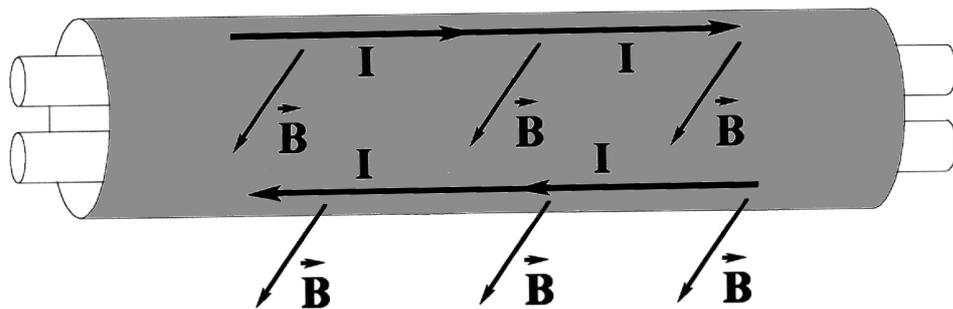


Fig. 1-7 : couplage de type 5 sur un câble multiconducteur écranté

La figure 1-7 illustre le couplage de type 5. Un champ magnétique est appliqué de façon telle qu'une partie du flux pénètre l'écran et induit directement des tensions sur les conducteurs internes du câble. A la différence des modes de couplage examinés jusqu'à présent, ce type de couplage place le champ magnétique dans une orientation « interdite » : les lois de l'électromagnétisme disent qu'un champ magnétique variable doit être parallèle à la surface d'un conducteur idéal, à proximité de ce conducteur. En fait, ceci ne doit pas nous préoccuper outre mesure, car c'est au champ appliqué que nous imposons d'être parallèle à la section droite du câble, et non au champ magnétique en présence du câble. Le couplage de type 5 peut être produit si nous installons le câble à l'intérieur d'une bobine de Helmholtz, orthogonalement à son axe. Nous caractérisons le comportement du câble vis-à-vis de ce phénomène avec une quantité définie pour chaque conducteur interne comme le rapport entre la tension par rapport à l'écran du câble induite par unité de longueur, et l'amplitude de la composante du champ magnétique incident (en A/m) orthogonale au câble. Nous appelons cette quantité l'*impédance de transfert*

parallèle du câble, elle s'exprime en Ω , et nous notons immédiatement qu'elle dépend a priori de l'orientation du champ par rapport au câble. Comme précédemment, il nous faut N impédances de transfert parallèle complexes, qui sont *a priori* dépendantes de l'orientation du champ magnétique. Le couplage de type 5 provoque, sur une longueur élémentaire dz de câble, l'apparition, sur le conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = Z_{PT\alpha} H_\perp dz \quad (1-8)$$

où H_\perp est la composante du champ magnétique parallèle à la section droite du câble, et où $Z_{PT\alpha}$ est l'impédance de transfert parallèle pour le conducteur α , dans la direction du champ magnétique appliqué.

1.5 Câbles ne possédant pas la symétrie cylindrique

Abordons à présent le cas d'un câble réel de section circulaire ou quasiment circulaire, sans hypothèse de symétrie cylindrique. Manifestement, nous pouvons conserver l'idée de définir cinq types de couplage, pourvu que nous définissions ces couplages à partir de la symétrie du champ incident (ou champ appliqué), comme elle apparaît dans les définitions données précédemment. Nous prendrons garde à ce que, dans ce cas, les symétries des courants évoquées au § 1.4 ne sont pas forcément présentes.

Considérons par exemple un simple câble coaxial dont l'écran est une bande métallique en spirale. Cet écran n'a pas la symétrie cylindrique, quoiqu'il soit de section circulaire ou quasiment circulaire. Ce câble n'appartient donc pas aux catégories de câble discutées dans les § 1.3 et § 1.4 ci-dessus. Par exemple, si un tel câble est excité par un champ magnétique appliqué azimutal, nous parlerons de couplage de type 1 en vertu de la symétrie du champ, mais le courant sur l'écran sera vraisemblablement hélicoïdal (en particulier à basses fréquences) [27] [33, § 6.3.3], au lieu de circuler longitudinalement. De plus le champ magnétique autour du câble ne sera plus azimutal, du fait du champ causé par le courant hélicoïdal.

Nous devons par conséquent être très prudents : parce que nous définissons les types de couplages en fonction de la symétrie du champ incident, les propriétés des distributions de charge et de courant, mentionnées au § 1.4, ne sont en général pas applicables.

1.6 Evaluation des paramètres de couplages

Nous allons, dans ce paragraphe, calculer les paramètres caractérisant les câbles pour les couplages exotiques (couplages de type 3, de type 4 et de type 5), dans les cas les plus simples, dans le but principal de clarifier les concepts. Nous nous limitons ici au cas où les dimensions transversales du câble sont beaucoup plus petites que la longueur d'onde.

Pour le couplage de type 3, nous pouvons facilement calculer l'impédance de transfert axial dans le cas d'un câble ayant un écran cylindrique de révolution et homogène, de rayon interne r_b , d'épaisseur d très petite devant r_b , de conductivité σ et de permittivité μ . En effet, H. Kaden [6, p. 78, équ. 21] a déjà effectué la plus grande partie du travail en établissant que si un tel écran est soumis à un champ magnétique appliqué H_z homogène et parallèle à l'axe du cylindre, le champ interne H_l est homogène, de même direction que le champ incident, et que le facteur d'écrantage vaut :

$$\frac{H_l}{H_z} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right) + \frac{1}{2}K \sinh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right)} \quad (1-9)$$

avec
$$K = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{1+j}{\delta} r_l \quad (1-10)$$

où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ est l'épaisseur de peau à la pulsation ω .

Manifestement, l'impédance de transfert axial sera nulle pour des conducteurs internes rectilignes et parallèles à l'axe du câble. Considérons donc le cas d'un câble contenant des conducteurs internes torsadés, le conducteur α étant torsadé avec un pas de m_α tours par mètre, selon une hélice de rayon r_α . L'impédance de transfert axial pour le conducteur α vaut manifestement :

$$Z_{AT\alpha} = \frac{j\omega\mu_0 m_\alpha \pi r_\alpha^2}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right) + \frac{1}{2}K \sinh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right)} \quad (1-11)$$

Cette formule considère que les conducteurs internes sont filiformes, et décrit seulement un couplage par diffusion. Bien sûr elle ne s'applique pas à des écrans dans lesquels le couplage par diffusion n'est pas prépondérant, tels que certains écrans constitués d'une tresse métallique. Il convient de noter que dans le cas d'un câble dont tous les conducteurs internes sont torsadés

ensemble, tous les m_α ont le même signe et pratiquement la même valeur, si bien que le couplage de type 3 produira principalement du mode commun sur les conducteurs internes.

Examinons à présent le cas du couplage de type 4. En nous appuyant sur la théorie de l'écrantage du champ électrique à basses fréquences, nous pouvons affirmer que pour un écran homogène suffisamment conducteur, l'admittance de transfert parallèle sera égale à zéro ou extrêmement faible, au même titre que le coefficient de couplage électrique radial. Les écrans de câble qui laisseront subsister un couplage de type 4 significatif sont donc ceux qui présentent des ouvertures et qui présenteront donc aussi un couplage de type 2 non nul. Considérons donc un câble écranté à deux conducteurs internes, présentant des ouvertures dans son écran, présentant les coefficients de couplage électrique radial ζ_{R1} et ζ_{R2} respectivement pour les conducteurs 1 et 2. Placé dans la configuration de champ représentée sur la figure 1-4, lorsque le câble porte une densité surfacique de charge ρ_S , le courant injecté dans le conducteur α est :

$$di_\alpha = j\omega 2\pi r_E \zeta_{R\alpha} \rho_S dx \quad (1-12)$$

où r_E est le rayon externe de l'écran du câble supposé dépourvu de gaine extérieure. Nous notons que cette formule s'applique à une configuration dans laquelle ρ_S est constant sur le bord externe (circulaire) d'une section droite du câble. Plaçons-nous dans un cas (certes quelque peu artificiel) où les ouvertures responsables du couplage sont soit "en haut" et beaucoup plus proches du conducteur 1 que du conducteur 2, soit "en bas" beaucoup plus proches du conducteur 2 que du conducteur 1. Dans ce cas, il n'y a pas d'interaction entre les ouvertures, et la formule (1-12) va pouvoir s'appliquer à la configuration représentée sur la figure 1-6, ρ_S étant la densité de charge "en haut" pour $\alpha = 1$, ou "en bas" pour $\alpha = 2$. Dans le cas où il n'y a pas de gaine à l'extérieur, la distribution de charge dans cette configuration se calcule facilement [Annexe C, équ. (C-32)] :

$$\rho_S = 2\varepsilon_0 \cos(\theta - \theta_E) E_\perp \quad (1-13)$$

où, dans une section droite du câble, θ est l'azimut du point où la densité surfacique de charge est considérée, par rapport à une direction arbitraire, et θ_E l'angle entre le champ électrique et cette direction arbitraire. En notant à présent θ_C l'azimut du conducteur 1, par rapport à cette direction arbitraire, nous obtenons donc, pour ce câble très particulier :

$$\begin{cases} Y_{PT1} = j\omega 4\pi\varepsilon_0 r_E \zeta_{R1} \cos(\theta_C - \theta_E) \\ Y_{PT2} = -j\omega 4\pi\varepsilon_0 r_E \zeta_{R2} \cos(\theta_C - \theta_E) \end{cases} \quad (1-14)$$

Notons qu'un torsadage des conducteurs internes revient à faire évoluer l'angle θ_C le long du câble, proportionnellement à la coordonnée axiale. Selon (1-14), la moyenne de Y_{PT1} et Y_{PT2} le long du câble, sur la longueur d'une torsade, est nulle.

Considérons à présent le couplage de type 5. Kaden [6, p. 80, equ. 33] a déterminé que, dans un écran de mêmes caractéristiques que celles définies pour la formule (1-9), soumis à un champ magnétique appliqué homogène et orthogonal à l'axe du cylindre H_{\perp} , le champ interne H_I est homogène, de même direction que le champ incident, et que le facteur d'écrantage vaut :

$$\frac{H_I}{H_{\perp}} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right) + \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{K}\right)\sinh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right)} \quad (1-15)$$

où les définitions données ci-dessus pour d , δ et K s'appliquent. Supposons que le câble contient deux conducteurs internes rectilignes, que le câble a trois plans de symétrie orthogonaux, et que les conducteurs peuvent être considérés comme filiformes, séparés par une distance Δ . Nous pouvons alors facilement calculer les impédances de transfert parallèle Z_{PT1} et Z_{PT2} respectivement pour les conducteurs 1 et 2 :

$$Z_{PT1} = \frac{\frac{1}{2}j\omega\mu_0\Delta \sin(\theta_H - \theta_C)}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right) + \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{K}\right)\sinh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right)} \quad (1-16)$$

$$Z_{PT2} = \frac{-\frac{1}{2}j\omega\mu_0\Delta \sin(\theta_H - \theta_C)}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right) + \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{K}\right)\sinh\left(\frac{1+j}{\delta}d\right)} \quad (1-17)$$

où dans une section droite du câble, θ_C est l'azimut du conducteur 1, par rapport à une direction arbitraire, et θ_H l'angle entre le champ magnétique appliqué et cette direction arbitraire.

Comme (1-11), les équations (1-16) et (1-17) décrivent seulement un couplage par diffusion, et ne s'appliquent qu'à des écrans dans lesquels le couplage par diffusion est prépondérant. Nous notons que pour le câble considéré, le couplage de type 5 produira principalement du mode différentiel sur les conducteurs internes. Nous notons aussi que si les conducteurs internes étaient torsadés, (1-16) et (1-17) pourraient en pratique s'appliquer, et que la moyenne de Z_{PT1} et Z_{PT2} le long du câble, sur la longueur d'une torsade, serait nulle.

1.7 Exemple de calcul de couplage champ-à-câble élémentaire

1.7.1 Préambule

Dans ce paragraphe, nous allons, en supposant connus les paramètres caractérisant un câble pour les cinq types de couplage, établir l'expression complète des tensions apparaissant sur les conducteurs internes dans deux situations de couplage champ-à-câble particulièrement intéressantes d'un câble écranté sans gaine posé sur un plan de masse : l'excitation longitudinale, et l'excitation transversale. Nous considérerons un échantillon de câble de section droite circulaire ou quasiment circulaire, que nous supposons de longueur électriquement courte. Plus précisément, nous postulerons que la longueur de câble est suffisamment petite devant la longueur d'onde, pour que l'on puisse négliger les effets de propagation et la diaphonie entre conducteurs internes.

Les deux excitations peuvent par exemple être produites dans une cellule TEM à plaques parallèles ou fermée. Selon l'excitation transversale montrée sur la figure 1-8, une onde TEM se propage parallèlement au plan de masse (le fond de la cellule TEM sur la figure) et illumine une section de câble disposée transversalement à la direction de propagation. Le champ magnétique H_0 incident est donc parallèle au câble, et le champ électrique incident E_0 est normal au câble.

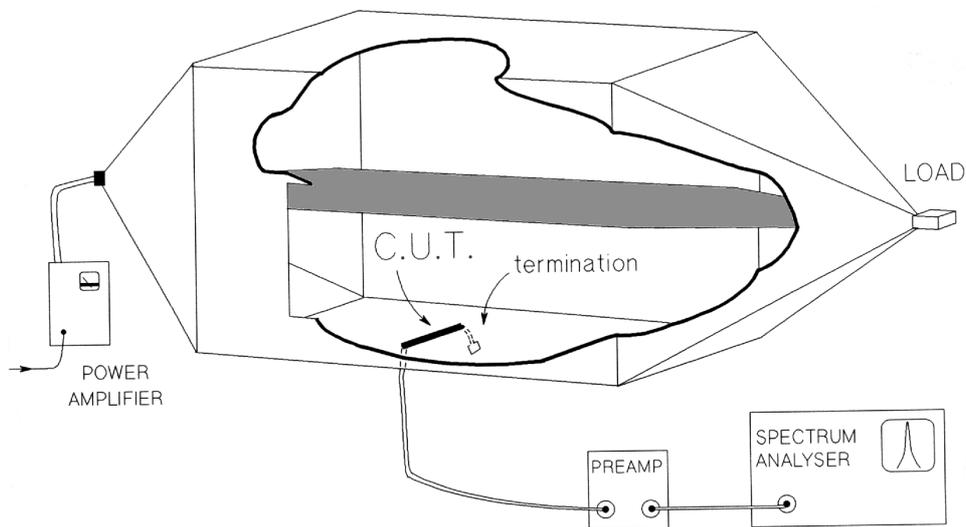


Fig 1-8: excitation transversale d'une section de câble (repérée C.U.T.) dans une cellule TEM fermée.

Selon l'excitation longitudinale montrée sur la figure 1-9, une onde TEM se propage parallèlement au plan de masse (le fond de la cellule TEM sur la figure) et illumine une section de câble disposée longitudinalement à la direction de propagation. Le champ magnétique incident H_0 et le champ électrique incident E_0 sont donc orthogonaux au câble.

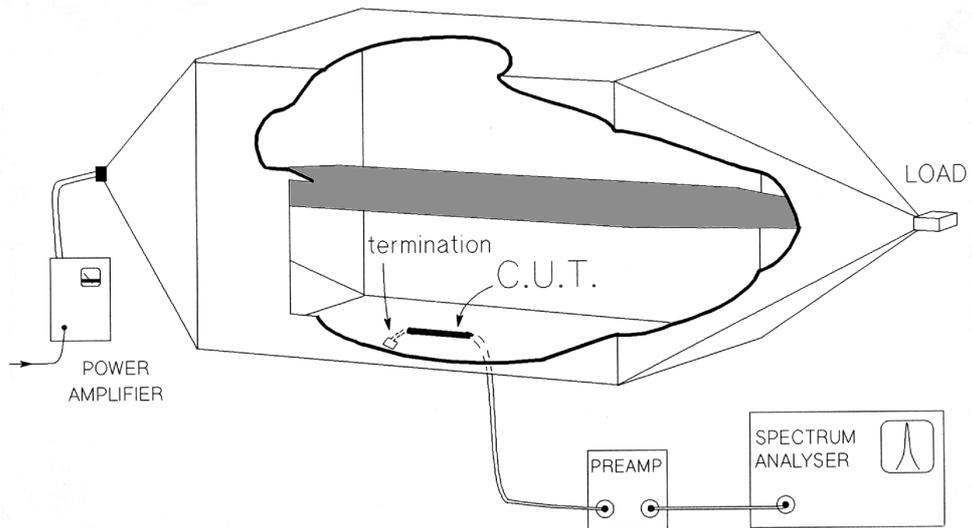


Fig 1-9: excitation longitudinale d'une section de câble (repérée C.U.T.) dans une cellule TEM fermée.

1.7.2 Calcul de la distribution de charge pour l'excitation longitudinale

La figure 1-10(a) montre l'allure du champ électrique autour du câble (vue d'artiste).

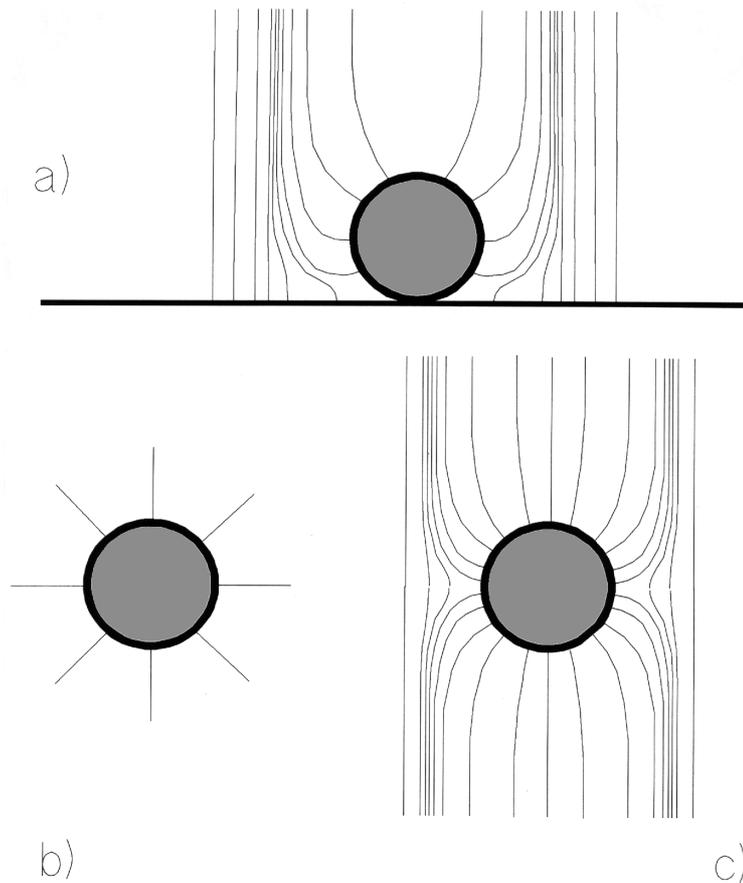


Fig 1-10 : lignes du champ électrique autour du câble, a) câble sur un plan de masse, b) câble chargé en espace libre, c) câble non chargé dans un champ électrique quasi-statique uniforme.

Choisissons un axe Ox vertical, orienté vers le haut. En utilisant cette origine pour les angles, la distribution surfacique de charge est une fonction paire et périodique. Elle peut donc s'écrire :

$$\rho_s(\theta) = \rho_{s_0} + \rho_{s_1} \cos\theta + \rho_{s_2} \cos 2\theta + \dots + \rho_{s_n} \cos n\theta + \dots \quad (1-18)$$

Le premier terme de ce développement, pris isolément, correspond à une distribution uniforme de charge, apparaissant sur un câble chargé isolé dans l'espace, représenté sur la figure 1-10(b). Comme le montre l'équation (1-13), le deuxième terme du développement, pris isolément, correspond à la distribution de charge apparaissant sur un câble non chargé plongé dans un champ électrique uniforme, représenté sur la figure 1-10(c).

L'examen de la figure 1-10 suggère que les deux premiers termes du développement (1-18) peuvent constituer une approximation satisfaisante de la distribution réelle. Sur la base de cette hypothèse, nous allons, en quelques lignes, estimer sans calcul les coefficients ρ_{s_0} et ρ_{s_1} . Nous notons en premier lieu que, l'écran du câble étant en contact avec le plan de masse, il est physiquement clair que $\rho_s(\pi) = 0$. La distribution de charge cherchée est donc de la forme:

$$\rho_s(\theta) \approx k\varepsilon_0 E_0 (1 + \cos\theta) \quad (1-19)$$

où k est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et E_0 le champ électrique appliqué, supposé uniforme. En second lieu, nous pouvons utiliser le théorème des images, ce qui nous conduit à remplacer le problème A comportant un cylindre de révolution conducteur portant la distribution de charge (1-19) avec un plan de masse et des charges à l'infini produisant un champ uniforme d'intensité E_0 , par le problème B comportant deux cylindres de révolution conducteurs portant la distribution de charge (1-19) et des charges à l'infini produisant un champ uniforme d'intensité E_0 . Ce problème B peut à son tour être vu comme la superposition de deux problèmes C comportant chacun un cylindre de révolution portant la distribution de charge (1-19), décalés de deux fois le rayon du câble, avec pour chacun de ces problèmes C, des charges à l'infini produisant un champ uniforme $E_0/2$. En général, il ne serait pas possible d'affirmer que la distribution de charge initiale corresponde à la distribution d'équilibre d'un des problèmes C obtenu par subdivision du problème B. Par conséquent, pour créer les problèmes C, nous devons rendre fixe la distribution de charge sur les cylindres, qui ne sont donc plus conducteurs. Mais (miracle), dans le cas particulier dont nous nous occupons, la distribution (1-19) correspond à celle que l'on trouve sur un cylindre de révolution conducteur chargé et soumis à l'action d'un champ électrique uniforme, et comme seul le terme $k\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$ est causé par les charges à l'infini, l'application de (1-13) avec $E_{\perp} = E_0/2$ montre qu'il y a équilibre pour $k = 1$.

Par conséquent, pour cette valeur particulière $k = 1$, le cylindre d'un problème C peut être considéré comme conducteur. Il en résulte que l'interaction entre les deux cylindres du problème B ne produit pas de mouvement de charge (autrement dit, les forces exercées sont normales à la surface des cylindres). Nous en déduisons sans calcul que $k = 1$ est la solution d'équilibre du problème B, donc du problème A. Ainsi, dans l'approximation choisie [39],

$$\rho_s(\theta) \approx \varepsilon_0 E (1 + \cos\theta) \quad (1-20)$$

Ce résultat intuitif peut être facilement amélioré par un calcul numérique simple. Par exemple, il est physiquement clair que la distribution de charge sur un cylindre conducteur produit un champ assez voisin de celui de distributions linéaires de charge sur des génératrices du cylindre choisies suffisamment espacées. Chacune des distributions linéaires de charge produit, en un point quelconque, un potentiel [Annexe C, équ. (C-2)] de la forme

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \log \frac{r}{r_0} \quad (1-21)$$

où λ est la densité linéique de charge de la distribution linéaire, r est la distance à la génératrice et r_0 est une distance arbitraire. Pour trouver les distributions linéiques de charge, il suffit, après application du théorème des images, d'imposer que le potentiel total en plusieurs points du conducteur soit nul, ce qui revient à inverser une matrice. Les coefficients de (1-18) sont ensuite obtenus par utilisation d'un algorithme FFT. Nous avons ainsi, avec le logiciel Mathcad, utilisé 32 génératrices par cylindre, séparées d'un angle $\pi/16$ comme montré sur la figure 1-11.

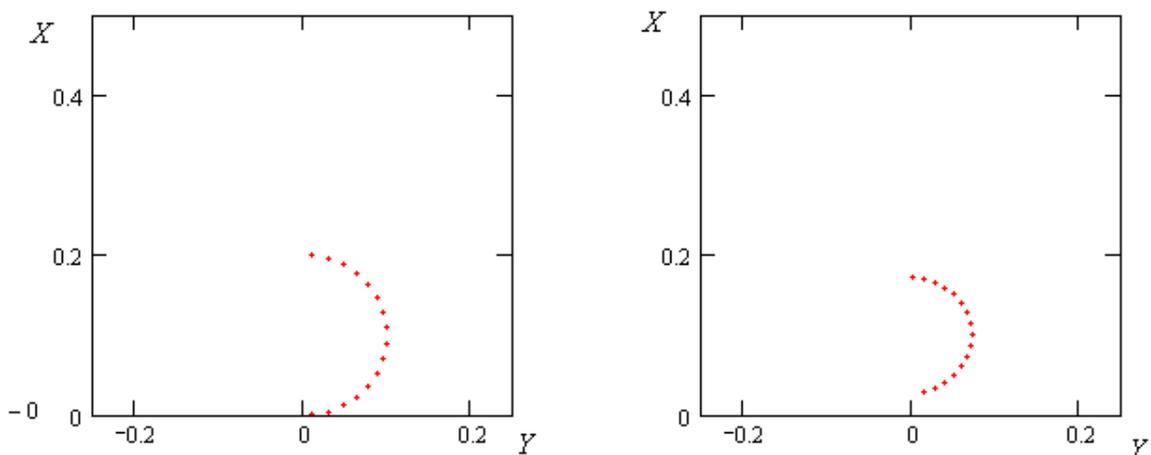


Fig. 1-11 : à gauche, les 16 génératrices d'un demi-cylindre, portant les charges, et à droite les points où le potentiel total est calculé, auquel on impose la valeur 0.

Nous avons calculé la distribution de charge montrée sur la figure 1-12, où les valeurs 0 et 31 (respectivement, 15 et 16) de l'indice k correspondent aux charges linéiques les plus

éloignées (respectivement, les plus proches) du plan de masse. Elle donne la série de Fourier :

$$\rho_s(\theta) = \varepsilon_0 E_0 \left[1,0000 + 1,2899 \cos \theta + 0,2285 \cos 2\theta - 0,0611 \cos 3\theta + \dots \right] \quad (1-22)$$

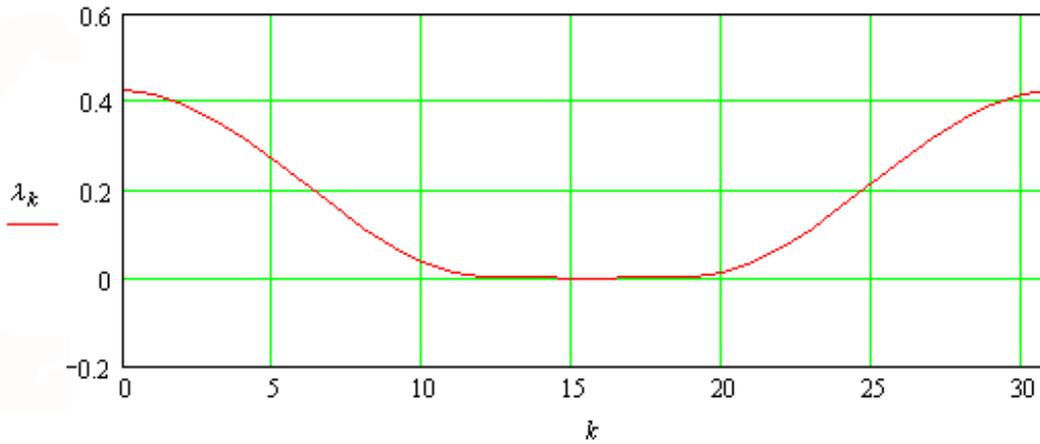


Fig. 1-12 : charge linéique (en pC/m) de chacune des 32 distributions linéiques, pour un champ appliqué de 1 V/m, en fonction de leur indice k .

Comme le montrera le calcul exact du § 6.2, toutes les décimales données dans (1-22) sont exactes, ce qui est remarquable pour une méthode aussi simple.

1.7.3 Couplage champ-à-câble élémentaire en excitation transversale

En excitation transversale, pour le couplage de type 2, (1-22) indique que la charge dq_0 à prendre en compte est simplement $2\pi r_E \varepsilon_0 E_0 dz$. Pour le couplage de type 4, il nous faut déterminer la valeur d'un champ électrique E_{\perp} homogène d'espace libre, appliqué transversalement au câble[†]. Ce n'est *a priori* pas le champ E_0 , qui est le champ appliqué en présence du seul plan de masse, donc sans la modification de la distribution superficielle de charge du plan de masse provoquée par la présence du câble. Nous comprenons que le champ E_{\perp} à prendre en compte est celui qui, en espace libre, produirait la distribution donnée par (1-13), égale au terme en $\cos \theta$ de (1-22). Nous avons donc, pour le conducteur interne α :

$$di_{\alpha} = \left(2j\omega \pi \varepsilon_0 r_E \zeta_{R\alpha} + 0,645 Y_{PT\alpha} \right) E_0 dz \quad (1-23)$$

Pour le couplage de type 1, il n'y a pas de courant longitudinal à prendre en compte en excitation transversale, les courants circulant sur le plan de masse, orthogonalement au câble. Pour le couplage de type 3, le champ magnétique à prendre en compte est clairement $H_0 = E_0/\eta_0$.

[†] Nous constatons que la définition (1-7) ne convient pas vraiment ici, car le champ appliqué au câble n'est pas homogène. Avec les bonnes définitions, celles du § 5.6, le calcul à effectuer sera plus clair.

Pour le couplage de type 5, il n'y a pas de champ magnétique transversal à prendre en compte. Nous avons donc, en excitation transversale, pour le conducteur interne α :

$$dv_{\alpha} = Z_{AT\alpha} \frac{E_0}{\eta_0} dz \quad (1-24)$$

1.7.4 Couplage champ-à-câble élémentaire en excitation longitudinale

Pour les couplages de type 2 et de type 4, (1-23) est manifestement applicable au couplage longitudinal, puisque l'orientation du champ électrique ne change pas par rapport au câble.

Pour le couplage de type 1, il nous faut déterminer le courant longitudinal i_{MC} à prendre en compte. Or, nous savons qu'à fréquences suffisamment élevées, les distributions de courant et de charges en ondes TEM sont identiques [36, p. 248], ce qui nous donne :

$$j_s(\theta) = \frac{E_0}{\eta_0} \left[1,0000 + 1,2899 \cos \theta + \right. \\ \left. + 0,2285 \cos 2\theta - 0,0611 \cos 3\theta + \dots \right] \quad (1-25)$$

où j_s est la densité surfacique de courant sur l'écran du câble. Le courant i_{MC} à retenir est donc $2\pi r_E E_0 / \eta_0$. Pour le couplage de type 3, le champ magnétique longitudinal à prendre en compte est nul. Pour le couplage de type 5, il nous faut établir la valeur d'un champ magnétique H_{\perp} homogène d'espace libre, appliqué transversalement au câble. Celui-ci n'est pas le champ H_0 , qui est le champ appliqué en présence du seul plan de masse, mais manifestement H_0 multiplié par le même coefficient que celui appliqué à $Y_{PT\alpha}$ dans (1-23). Nous avons donc, en excitation longitudinale, pour le conducteur interne α :

$$dv_{\alpha} = \left(2\pi r_E Z_{T\alpha} + 0,645 Z_{PT\alpha} \right) \frac{E_0}{\eta_0} dz \quad (1-26)$$

Il faut ici noter que ces résultats supposent que la distribution de courant dans le câble et le plan de masse est bien la distribution de courant haute fréquence, qui correspond à des courants pelliculaires affectés par l'effet de proximité. Cette hypothèse sera raisonnablement vérifiée au-delà de 100 kHz, pour les métaux usuels.

1.8 Comparaison des signaux couplés par les différents types de couplage

Munis des résultats du § 1.7 et du § 1.8, nous pouvons à présent comparer les types de couplage produisant une tension induite (types 1, 3 et 5) entre eux, et les types de couplage produisant une injection de courant (types 2 et 4) entre eux.

Considérons donc un câble ayant un bon écran cylindrique de révolution, homogène. Rappelons la formule de Schelkunoff [2] [28, ch. 5], qui donne l'impédance de transfert d'un câble coaxial à paroi mince :

$$Z_T = R_{DC} \frac{\frac{1+j}{\delta} d}{\sinh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right)} \quad (1-27)$$

où R_{DC} est la résistance linéique de l'écran du câble. En utilisant (1-11), (1-24), (1-26) et (1-27), nous pouvons calculer le rapport de la tension induite par le couplage de type 3 sur celle induite par le couplage de type 1 :

$$\frac{dv_{type3}}{dv_{type1}} = \frac{j\omega\mu_0 m_\alpha r_\alpha^2}{2r_E R_{DC} \frac{1+j}{\delta} d} \frac{\sinh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right)}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right) + \frac{1}{2} K \sinh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right)} \quad (1-28)$$

A basses fréquences, quand $\delta \gg d$ et $r_E R_{DC} \gg \omega\mu_0 m_\alpha r_\alpha^2$, ce rapport tend vers zéro. Par contre, à hautes fréquences, pour $\delta \ll d$, nous avons :

$$\frac{dv_{type3}}{dv_{type1}} \approx \frac{2\pi_0 m_\alpha r_\alpha^2}{r_I} \quad (1-29)$$

Par exemple, pour $m_\alpha = 40 \text{ m}^{-1}$, $r_\alpha = 0,003 \text{ m}$, $r_I = 0,004 \text{ m}$, nous obtenons environ 0,56 pour ce rapport. En utilisant (1-16), (1-26) et (1-27), nous pouvons aussi calculer le rapport de la tension induite par le couplage de type 5 sur celle induite par le couplage de type 1 :

$$\frac{dv_{type5}}{dv_{type1}} = \frac{\frac{0,645}{2} j\omega\mu_0 \Delta}{2\pi r_E R_{DC} \frac{1+j}{\delta} d} \frac{\sin(\theta_H - \theta_C) \sinh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right)}{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right) + \frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{K}\right) \sinh\left(\frac{1+j}{\delta} d\right)} \quad (1-30)$$

A basses fréquences, quand $\delta \gg d$ et $r_E R_{DC} \gg \omega\mu_0 m_\alpha r_\alpha^2$ ce rapport tend vers zéro. Par contre, à hautes fréquences, pour $\delta \ll d$, nous avons :

$$\frac{dv_{type5}}{dv_{type1}} \approx \frac{0,645 \Delta \sin(\theta_H - \theta_C)}{r_I} \quad (1-31)$$

Par exemple, pour $\Delta = 0,006 \text{ m}$, $r_I = 0,004 \text{ m}$, nous obtenons une valeur maximale d'environ 0,97 pour ce rapport. Rappelons que ce couplage produit directement un signal différentiel, mais qu'il est éventuellement réduit par un torsadage.

Enfin, en utilisant (1-14) et (1-23), nous pouvons calculer un rapport entre le courant injecté par le couplage de type 4 et celui injecté par le couplage de type 2. Nous trouvons :

$$\frac{di_{type4}}{di_{type2}} = 1,29 \cos(\theta_C - \theta_E) \quad (1-32)$$

La valeur maximale de ce rapport est donc supérieure à 1, mais rappelons qu'il correspond à un câble très particulier, et qu'il ne prend pas en compte un éventuel torsadage.

1.9 Conclusion

Nous avons examiné dans ce chapitre les idées justifiant la prise en compte de cinq différents types de couplage, au moins, sur des câbles écrantés de section circulaire ou quasiment circulaire. Nous avons défini les paramètres permettant de caractériser le câble pour les trois types de couplage “exotiques” :

- l'impédance de transfert axial pour le couplage de type 3,
- l'admittance de transfert parallèle pour le couplage de type 4,
- l'impédance de transfert parallèle pour le couplage de type 5.

Nous avons ensuite, pour certaines structures facilement calculables de câble de section circulaire, déterminé ces paramètres.

Nous avons vu en détail comment tenir compte des différents modes de couplage dans des calculs prédictifs pour deux situations concrètes de couplage, pour lesquelles le câble est sans gaine et plaqué contre une structure métallique. Cette configuration est d'ailleurs celle dont nous attendons les meilleures caractéristiques de CEM. Pour des câbles particuliers, nous avons enfin montré que :

- les tensions induites par les couplages de type 1, 3 et 5 peuvent être comparables,
- les courants induits par les couplages de type 2 et 4 peuvent être comparables.

A ce stade, sur le plan théorique, l'étude des cinq couplages n'est qu'ébauchée : il faudrait notamment préciser le développement du champ électromagnétique auquel correspondent les cinq couplages, justifier pleinement les méthodes de calcul des couplages champ-à-câble, et étendre la théorie aux câbles plats et autres. Ce sera le sujet des chapitres suivants.

Chapitre 2 : Types de réponse de l'écran cylindrique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude de la caractérisation électromagnétique des écrans électromagnétiques cylindriques de section quelconque. Rappelons que notre but est double : nous voulons d'une part étendre l'approche du chapitre 1 à une plus vaste classe d'écrans (les écrans ne sont plus nécessairement de révolution, nous ne nous limitons pas aux écrans de câble) et nous entendons d'autre part approfondir ses fondements théoriques. A ce dernier titre, nous souhaitons notamment mettre en lumière la signification exacte de l'approximation consistant à ne prendre en compte que les cinq principaux types de couplage. Comme indiqué dans l'introduction, ce chapitre et les deux qui suivent sont assez ardues sur le plan mathématique, mais ils peuvent être laissés de côté en première lecture, car le chapitre 5 et les suivants sont rédigés de façon à offrir cette faculté.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons, de la façon la plus générale, à un écran cylindrique, qui est une structure de conducteurs électriques ou de conducteurs magnétiques devant assurer la fonction de réduction des couplages, dans une certaine bande de fréquences. Cette structure est souvent très complexe, par exemple dans le cas d'une tresse ou d'un ruban spiralé. Cette complexité va nous conduire à considérer le plus souvent un écran généralisé contenant l'écran réel, au lieu de ce dernier.

Dans son acception la plus générale, la notion d'écran généralisé [31] [51, § 10.2] est utilisée en topologie électromagnétique pour désigner une réunion quelconque d'écrans conducteurs et de zones d'exclusion. Les zones d'exclusion sont définies comme des volumes dans lesquels il n'est pas permis d'introduire de source de champ ou de conducteurs. Elles contribuent à la réduction des couplages en garantissant une distance de séparation minimale. Par exemple, nous pouvons définir un écran généralisé constitué d'une tresse en cuivre *et* d'une gaine en chlorure de polyvinyl *et* d'interstices de formes quelconques contenant de l'air. Nous voyons que nous pouvons ainsi raisonner sur un écran généralisé, contenant l'écran du câble, et de forme géométrique plus simple que l'écran réel.

Sur le plan mathématique, nous supposons que l'écran généralisé est un ensemble fermé et connexe, et dont le bord est la réunion d'un bord interne cylindrique C_1 et d'un bord externe

cylindrique C_E , ces deux bords n'ayant aucun point commun et le second entourant le premier. Le bord interne entoure un ensemble ouvert et connexe que nous appellerons *le volume à l'intérieur de l'écran généralisé*. Les points de l'espace qui sont à l'extérieur du bord externe forment un ensemble ouvert et connexe que nous appellerons *le volume à l'extérieur de l'écran généralisé*. Ainsi, l'écran généralisé, le volume à l'intérieur de l'écran généralisé et le volume à l'extérieur de l'écran généralisé forment une partition de l'espace.

2.2 Notation pour l'utilisation de coordonnées curvilignes

Dans la suite, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ sera une base orthonormée directe. Une origine O étant choisie, les coordonnées (cartésiennes) dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ sont x, y et z , et le bord externe de l'écran généralisé sera un cylindre C_E dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz . L'intersection $\Gamma(z_0)$ de ce cylindre et d'un plan d'équation $z = z_0$ dans \mathcal{R} , n'est pas nécessairement circulaire, mais est une courbe continue et fermée, dont l'isobarycentre peut par exemple être placé sur l'axe Oz . En tout point de C_E , nous définissons (voir figure 2-1) une base orthonormée directe locale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$: le vecteur unitaire \mathbf{e}_1 est partout normal à C_E et pointe vers l'extérieur, et le vecteur unitaire \mathbf{e}_2 est tangent à C_E et perpendiculaire à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_z .

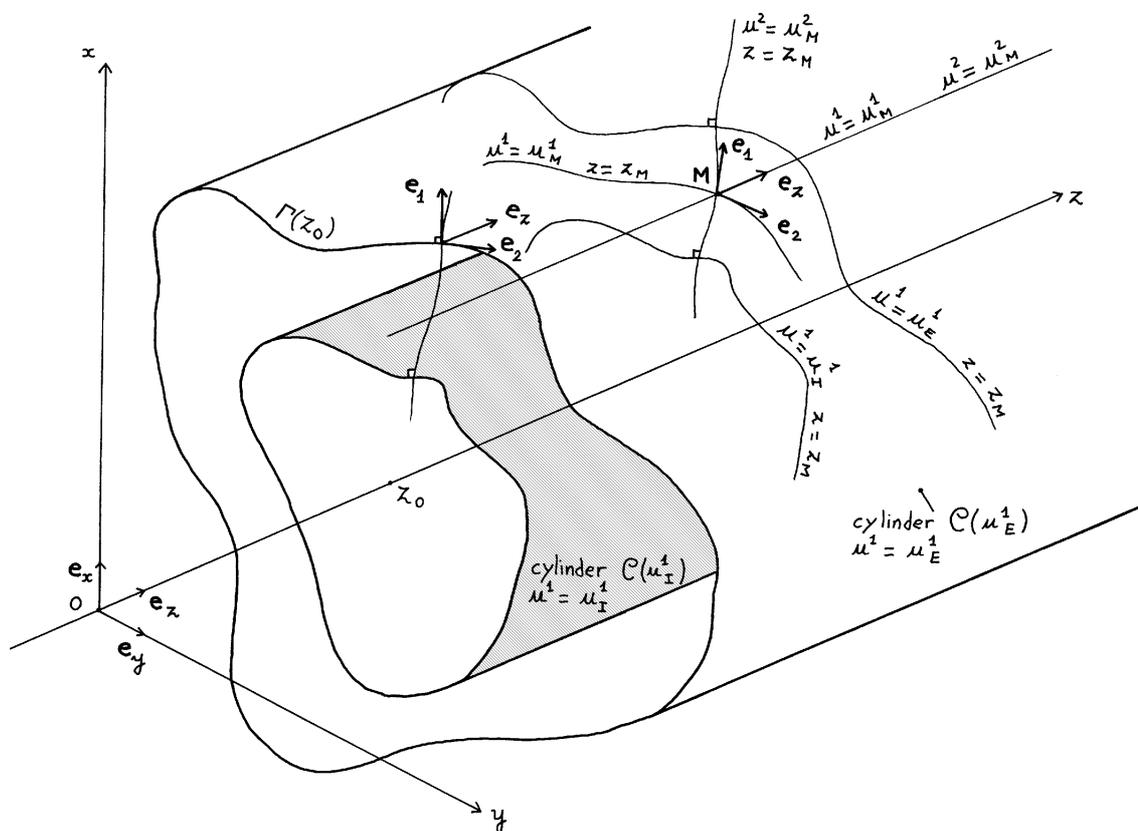


Fig. 2-1 : notre choix de coordonnées curvilignes

La coordonnée curviligne u^2 sur chaque courbe $\Gamma(z_0)$ est choisie de telle façon qu'elle soit sans dimension, que l'arc paramétré correspondant soit une bijection continue de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ vers $\Gamma(z_0)$, et que les courbes $u^2 = \text{constante}$ soient des droites parallèles à \mathbf{e}_z . Le couple (u^2, z) est donc un système de coordonnées curvilignes orthogonales sur le cylindre C_E . La définition de la coordonnée u^2 peut être étendue à \mathbb{R} , de telle façon que l'arc paramétré de \mathbb{R} vers $\Gamma(z_0)$ soit continu et périodique de période 2π . La coordonnée u^2 sera (abusivement) appelée *azimut*.

Nous pouvons manifestement obtenir des coordonnées curvilignes (u^1, u^2, z) pour tout l'espace en choisissant convenablement une famille $\mathcal{C}(u^1)$ de cylindres, un des cylindres de la famille étant le bord externe C_E de l'écran généralisé, et un autre le bord interne C_I de l'écran généralisé, chaque cylindre de la famille étant muni en tout point d'une base orthonormée directe locale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$, et d'un système de coordonnées locales (u^2, z) construit comme précédemment, et assujéti à la condition que le rayon vecteur élémentaire vaille :

$$d\mathbf{r} = h_1 \mathbf{e}_1 du^1 + h_2 \mathbf{e}_2 du^2 + \mathbf{e}_z dz \quad (2-1)$$

Nous voyons que h_1 et h_2 ne dépendent pas de z . De plus, comme les bords externes et internes de l'écran généralisé sont des cylindres de la famille, ils sont respectivement décrits par les équations $u^1 = u^1_E$ et $u^1 = u^1_I$. La figure 2-1 illustre notre choix de coordonnées, en montrant la construction d'un point M de coordonnées curvilignes (u^1_M, u^2_M, z_M) .

La possibilité de construire effectivement un tel système de coordonnées dans tout l'espace est évidente pour le physicien. En effet, considérons le problème d'électrostatique dans lequel :

- le bord externe et le bord interne sont matérialisés par des surfaces minces de conducteur électrique idéal,
- un conducteur électrique parfait filiforme rectiligne et parallèle aux génératrices des cylindres est installé dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé,
- le reste de l'espace est rempli avec une substance diélectrique,
- le conducteur filiforme est chargé avec des charges prises sur le conducteur matérialisant le bord interne, ce qui fait apparaître un champ électrique entre ces deux conducteurs, donc dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé,
- le conducteur matérialisant le bord interne est chargé avec des charges prises sur le conducteur matérialisant le bord externe, ce qui fait apparaître un champ électrique entre ces deux conducteurs,

— le conducteur matérialisant le bord externe est chargé avec des charges prises à l'infini, ce qui fait apparaître un champ électrique dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé.

Les surfaces équipotentiels et les lignes de champ électrique apparaissant dans ce problème vérifient les conditions d'orthogonalité qui permettent manifestement de les utiliser pour créer sans difficulté un système de coordonnées curvilignes ayant toutes les caractéristiques définies précédemment. Cette considération montre aussi qu'il existe beaucoup de tels systèmes de coordonnées curvilignes différents : nous pouvons générer une infinité de solutions différentes au problème d'électrostatique que nous avons évoqué, en changeant la distribution de la permittivité dans la substance diélectrique.

2.3 Courants sur l'écran généralisé et conservation de charge

Considérons la situation dans laquelle toutes les sources fournissant la puissance électromagnétique sont dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Si l'écran généralisé a des bords parfaitement conducteurs, les charges ne peuvent apparaître que sur son bord externe C_E . Dans le cas contraire, des charges peuvent apparaître sur les bords internes et externes de l'écran généralisé, et aussi à l'intérieur de l'écran généralisé lui-même. Dans le cas général, la densité volumique de charge ρ dépend donc des trois coordonnées u^1, u^2, z , et nous la traiterons comme une distribution (au sens mathématique). L'intégration de la densité volumique de charge ρ sur l'épaisseur de l'écran généralisé donne une quantité homogène à une charge surfacique. Cependant, il est plus commode d'introduire la *densité de charge linéique locale* (exprimée en C/m) que nous noterons ρ_L , définie par :

$$\rho_L(u^2, z) = 2\pi \int_{u^1_I}^{u^1_E} \rho h_1 h_2 du^1 \quad (2-2)$$

où le chemin d'intégration est une portion de courbe $u^2 = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$. Nous constaterons plus loin que cette définition de ρ_L permet une expression élégante de la conservation de la charge.

Dans le cas d'un bord parfaitement conducteur en $u^1 = u^1_E$, comme les sources fournissant la puissance électromagnétique ne sont par hypothèse présentes que dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, les charges n'apparaissent que comme des charges superficielles sur le bord externe C_E , ayant une densité surfacique de charge ρ_S telle que

$$\rho(u^1, u^2, z) h_1 du^1 = \rho_S(u^2, z) \delta(u^1 - u^1_E) du^1 \quad (2-3)$$

où δ est la distribution de Dirac. Dans ce cas particulier, nous avons donc :

$$\rho_S = \frac{\rho_L}{2\pi h_2} \quad (2-4)$$

Revenons au cas général d'un écran généralisé de caractéristiques quelconques. Considérée comme une fonction de l'azimut u^2 , ρ_L est périodique de période 2π et peut donc être développée en série de Fourier :

$$\rho_L(u^2, z) = \rho_{L0}(z) + \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{Ln}(z) \exp(inu^2) \right] \quad (2-5)$$

où le coefficient ρ_{L0} est réel, où pour $n \geq 1$ le coefficient ρ_{Ln} est complexe, où $i^2 = -1$ avec $\text{Im}(i) = 1$, et où Re et Im sont respectivement les fonctions partie réelle et partie imaginaire.

Il est important de noter que, en $z = z_0$ la charge totale par unité de longueur de l'écran généralisé, est donnée par :

$$\iint_{\text{shield}} h_1 h_2 \rho \, du^1 \, du^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_L \, du^2 = \rho_{L0} \quad (2-6)$$

où l'intégrale du membre de droite est effectuée sur la surface correspondant à l'intersection entre l'écran généralisé et le plan d'équation $z = z_0$.

Si l'écran généralisé a des bords parfaitement conducteurs, des courants superficiels peuvent y circuler. Dans le cas contraire, de tels courants n'apparaissent pas, mais une intégration de la densité surfacique de courant \mathbf{j} vue comme une distribution, sur l'épaisseur de l'écran généralisé (par rapport à la variable u^1) donne une quantité qui est homogène à une densité linéique de courant (exprimée en A/m). Cependant, il sera plus agréable d'introduire un *vecteur courant local* (exprimé en Ampère) que nous noterons \mathbf{i}_V , et qui est défini par :

$$\mathbf{i}_V = i_{VR} \mathbf{e}_1 + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2 + i_{VA} \mathbf{e}_z \quad (2-7)$$

avec

$$\begin{cases} i_{VR} = 2\pi h_1 \int_{u^1_I}^{u^1_E} h_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 \, du^1 \\ j_{VO} = 2\pi \int_{u^1_I}^{u^1_E} h_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2 \, du^1 \\ i_{VA} = 2\pi \int_{u^1_I}^{u^1_E} h_1 h_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z \, du^1 \end{cases} \quad (2-8)$$

où le chemin d'intégration est une portion de courbe $u^2 = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$.

Dans le cas d'un bord parfaitement conducteur en $u^1 = u^1_E$, comme les sources fournissant la puissance électromagnétique ne sont par hypothèse présentes que dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, les courants n'apparaissent que comme des courants superficiels sur le bord externe C_E , ayant une densité surfacique de courants \mathbf{j}_S telle que

$$\mathbf{j}(u^1, u^2, z) h_1 \, du^1 = \mathbf{j}_S(u^2, z) \delta(u^1 - u^1_E) \, du^1 \quad (2-9)$$

où δ est encore la distribution de Dirac. Nous avons donc, dans ce cas particulier :

$$\mathbf{j}_S = \frac{\mathbf{i}_V}{2\pi h_2} \quad (2-10)$$

Dans ce cas toujours, si l'écran généralisé est isolé, nous avons $i_{VR} = 0$. Ceci sera également le cas pour de bons écrans isolés. Cependant i_{VR} ne devra pas être négligé dans le traitement d'écrans imparfaits : l'effet de marsouinage (en anglais : porpoising phenomenon) [33, § 6.3.2] [34] [51, § 9.4.6] dans les écrans tressés est précisément provoqué par ce type de courant.

Revenons au cas général d'un écran généralisé de caractéristiques quelconques. Développons les deux dernières composantes de \mathbf{i}_V en série de Fourier, de la façon suivante :

$$j_{VO}(u^2, z) = j_{VO0}(z) + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} j_{VO n}(z) \exp(inu^2) \right] \quad (2-11)$$

$$i_{VA}(u^2, z) = i_{VA0}(z) + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} i_{VA n}(z) \exp(inu^2) \right] \quad (2-12)$$

où les coefficients j_{VO0} et i_{VA0} sont réels, où pour $n \geq 1$ les coefficients $j_{VO n}$ et $i_{VA n}$ sont complexes, et où $i^2 = -1$ avec $\operatorname{Im}(i) = 1$.

Nous notons que le courant total circulant le long de l'axe de l'écran généralisé vaut :

$$\iint_{\text{shield}} h_1 h_2 \, \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z \, du^1 \, du^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_{VA} \, du^2 = i_{VA0} \quad (2-13)$$

où l'intégrale du membre de droite est effectuée sur la surface correspondant à l'intersection entre l'écran généralisé et le plan d'équation $z = z_0$.

Dans les coordonnées curvilignes orthogonales que nous avons définies, la divergence d'un vecteur \mathbf{F} de coordonnées (F_1, F_2, F_z) s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 F_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2 F_z) \right] \quad (2-14)$$

L'égalité $\text{div } \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ exprimant la conservation de la charge, dans le domaine temporel, une fois multipliée par $h_1 h_2$ et intégrée par rapport à u^1 le long d'une courbe $u^2 = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$, devient donc :

$$\int_{u^1_I}^{u^1_E} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z) \right\} du^1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{u^1_I}^{u^1_E} h_1 h_2 \rho du^1 = 0 \quad (2-15)$$

Supposant que l'écran généralisé est isolé, nous avons $\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ en $u^1 = u^1_E$ et en $u^1 = u^1_I$, et en supprimant une dépendance en $e^{j\omega t}$, nous obtenons dans le domaine fréquentiel [53] :

$$\frac{\partial i_{VA}}{\partial z} + \frac{\partial j_{VO}}{\partial u^2} + j\omega \rho_L = 0 \quad (2-16)$$

où $j^2 = -1$ avec $\text{Im}(j) = 1$. Nous notons que i utilisé dans (2-5) (2-11) et (2-12) correspond à un paramètre de position et que j utilisé dans (2-16) correspond à un paramètre de phase. Pris isolément, ils sont le même nombre complexe. Toutefois, comme nous allons les mélanger dans des expressions alors qu'ils ont des significations différentes, il faudra considérer que ces deux nombres, ainsi que les phases des quantités complexes des équations où ils apparaissent, sont sans relation. Mathématiquement, ces deux nombres sont les quaternions[†] réels \mathbf{i} et \mathbf{j} , qui peuvent être identifiés à des nombres complexes lorsque uniquement des quaternions de $\mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$ sont présents dans une expression, ou bien lorsque uniquement des quaternions de $\mathbb{R} + \mathbf{j} \mathbb{R}$ sont présents dans une expression. Dans ce chapitre, toute quantité liée à \mathbf{i} sera qualifiée de *azimutale*, et toute quantité liée à \mathbf{j} sera qualifiée de *temporelle*.

Notons à présent que le choix des définitions dans (2-2), (2-7) et (2-8) a été fait de façon à permettre des expressions simples dans (2-6), (2-13) et (2-16). Cette dernière équation se transforme aisément dans le domaine de Fourier azimutal, et en supprimant la dépendance en $\exp(\mathbf{i} n u^2)$, nous obtenons :

$$\frac{\partial i_{VA0}}{\partial z} + \mathbf{j} \omega \rho_{L0} = 0 \quad (2-17)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\frac{\partial i_{VAN}}{\partial z} + n j_{VO_n} \mathbf{i} + \mathbf{j} \omega \rho_{Ln} = 0 \quad (2-18)$$

[†] Rappelons que les quaternions réels, aussi appelés quaternions de Hamilton, forment un corps non commutatif, et un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4, dont la base naturelle est $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, avec $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = -1$ et $\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}$. Des propriétés élémentaires des quaternions de Hamilton sont exposées dans l'Annexe A.

Les équations (2-17) et (2-18) sont valables dans le corps des quaternions réels. Toutefois, (2-17) peut être vue comme une relation dans le corps des nombres complexes, car elle ne contient que des éléments de $\mathbb{R} + \mathbf{j} \mathbb{R}$. Dans (2-18) par contre, chacune des trois quantités ρ_{L_n} , j_{VO_n} et i_{VA_n} est un quaternion. Les équations (2-17) et (2-18) seront démontrées rigoureusement et abondamment discutées au chapitre 3, où nous verrons aussi dans quelle mesure (2-18) peut être remplacée par deux expressions complexes.

Les résultats (2-17) et (2-18) méritent des commentaires de physique. Comme nous le savons, il est expérimentalement possible, sur une longueur électriquement courte d'écran généralisé, d'avoir un ρ_{L_0} négligeable (c'est ce que l'on fait dans un banc triaxial pour la mesure de l'impédance linéique de transfert d'un câble coaxial). Dans ce cas, (2-17) exprime que la conservation de la charge devient une conservation du courant longitudinal i_{VA_0} , car (2-17) ne contient pas de terme analogue au second terme de (2-18). En utilisant (2-13), nous concluons que dans ce cas, pour qu'un courant total circule dans l'écran généralisé, il est nécessaire qu'existe un circuit de retour pour le courant. L'équation (2-18) indique qu'un circuit de retour n'est pas nécessaire dans le cas $n \geq 1$: une densité linéique de courant j_{VO_n} peut fournir le courant de retour pour des courants i_{VA_n} , comme montré sur la figure 2-2 pour le cas $n = 1$ sur un écran généralisé homogène dont la section droite n'a ni axe ni plan de symétrie.

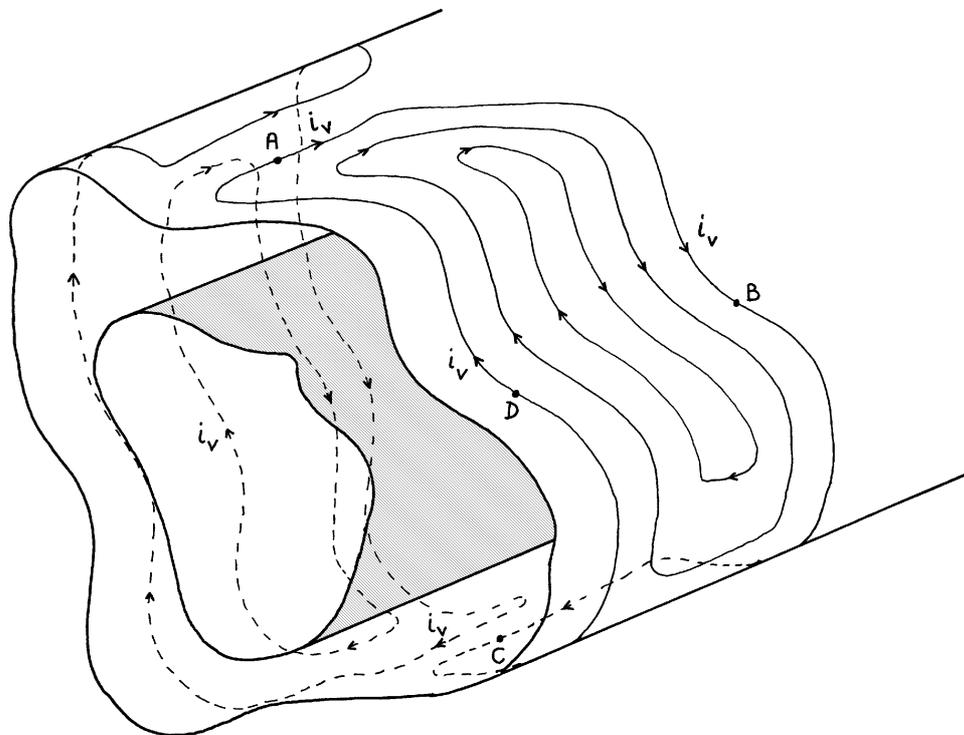


Fig. 2-2 : une combinaison de courant linéique j_{VO_1} et de courant i_{VA_1} .

Sur cette figure 2-2, nous observons une situation où les seules composantes non négligeables du courant local \mathbf{i}_v circulant sur l'écran généralisé sont j_{VO1} et i_{VA1} . Le courant local, qui ne dépend que de u^2 et z est représenté projeté orthogonalement sur la surface externe de l'écran généralisé. Les valeurs de j_{VO1} et i_{VA1} le long de l'axe z sont telles qu'apparaissent des courants tourbillonnaires. Des courants de cette allure peuvent apparaître du fait de l'application locale d'un champ magnétique variable orthogonal à l'axe Oz . Sur la figure 2-2, aux points A et C, placés dans un même plan orthogonal à l'axe et dont la coordonnée u^2 diffère d'environ π , la composante i_{VA1} est prépondérante. Aux deux points B et D, qui ont la même coordonnée u^2 , la composante j_{VO1} domine.

Le traitement du comportement de l'écran généralisé pour $n = 0$ est donc un problème global, c'est-à-dire impliquant la totalité de l'écran généralisé et un circuit de retour, mais le comportement de l'écran *peut* être un problème local pour $n \geq 1$. Une solution telle que représentée sur la figure 2-2 n'est pas toujours possible : nous pouvons par exemple imaginer un écran généralisé constitué de fils conducteurs isolés, parallèle à l'axe Oz , qui interdirait la circulation de densité linéique de courant $j_{VO n}$ et pour lequel la détermination de courants $i_{VA n}$ serait donc toujours un problème global.

2.4 Définition des types de réponse

L'écran généralisé étant passif, les charges et courants qu'il porte peuvent être considérés comme des réponses à des stimuli externes. Nous allons dans le présent paragraphe définir un vocabulaire [53] pour une classification des charges et des courants sur l'écran généralisé, articulé autour du terme *réponse*.

Définition : Réponse. Nous appelons *réponse de l'écran généralisé*, ou simplement *réponse*, le couple de la distribution du courant et de la distribution de charge sur cet écran généralisé.

Dans le § 2.3 a été bâtie une décomposition de la réponse de l'écran généralisé, qui se prête bien à une classification. Cependant, cette décomposition repose sur une construction géométrique qui n'est pas unique.

Théorème 1 : En notant C_I le bord interne, et C_E le bord externe de l'écran généralisé,

i) il existe une définition des coordonnées curvilignes (u^1, u^2, z) dans l'écran généralisé et sur ses bords C_I et C_E , conforme aux spécifications du § 2.2 et telle que :

— si C_E était matérialisé par une paroi mince d'un conducteur électrique idéal, une densité de charge linéique locale ρ_L indépendante des variables u^2 et z correspondrait à l'équilibre électrostatique de la paroi seul objet dans l'espace,

— si C_1 et C_E étaient respectivement matérialisés par une paroi mince d'un conducteur électrique idéal, et que l'on formait de cette façon les deux parois d'un condensateur supposé ne contenir qu'un diélectrique homogène, les surfaces $u^1 = \text{constante}$ seraient les surfaces équipotentielles apparaissant à l'équilibre électrostatique après la charge de ce condensateur ;

ii) de plus, cette définition de la coordonnée u^2 dans l'écran généralisé et sur ses bords C_1 et C_E est unique à une constante additive près.

Preuve : Supposons que nous déposions une charge linéique Q , constante le long de l'écran généralisé, sur la paroi extérieure C_E métallisée, supposée seule dans l'espace. Du fait de l'invariance de C_E par translation le long de Oz , la densité surfacique de charge ρ_s qui apparaît à l'équilibre sur C_E a également cette symétrie et ne dépend donc pas de z . Supposons qu'il existe une coordonnée u^2 répondant à la question, et appelons L la longueur de la courbe fermée $\Gamma(0)$. Comme la densité de charge linéique locale ρ_L est indépendante de u^2 , elle est égale à ρ_{L0} d'après (2-6), et en utilisant (2-4) nous obtenons :

$$Q = \int_0^{2\pi} \rho_s h_2 du^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_L du^2 = \rho_L = \rho_{L0} \quad (2-19)$$

En utilisant à nouveau (2-4), nous obtenons :

$$h_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_s} \quad (2-20)$$

Si s est une abscisse curviligne sur $\Gamma(0)$, la coordonnée u^2 vérifie donc :

$$\frac{du^2}{ds} = \frac{2\pi\rho_s}{Q} \quad (2-21)$$

qui est une équation différentielle définissant u^2 à une constante additive près, ce qui établit l'unicité sur C_E . L'unicité sur l'ensemble fermé délimité par le bord en découle.

Pour établir l'existence des coordonnées curvilignes (u^1, u^2, z) , nous notons en premier lieu que les surfaces $u^1 = \text{constante}$ sont simplement définies par les surfaces équipotentielles. Le problème subsistant est la définition de la coordonnée u^2 sur les courbes intersection des surfaces $u^1 = \text{constante}$ et des plans $z = \text{constante}$. Soit s une coordonnée curviligne sur une de ces courbes.

La charge linéique Q étant déposée sur l'écran généralisé, nous voyons que si la charge surfacique ρ_S apparaissant sur C_E métallisé et seul objet dans l'espace est intégrable, (2-21) admet des solutions permettant de calculer u^2 . Or ρ_S se définissant comme la dérivée (aux sens des distributions) de la charge par rapport aux coordonnées s et z , elle est nécessairement intégrable au sens de Lebesgue. De plus, il est physiquement clair que ρ_S est soit partout positive, soit partout négative. Nous pouvons donc obtenir à partir de (2-21) une quantité u^2 qui sera bien monotone, donc appropriée pour définir une coordonnée. Pour cette définition de u^2 nous avons :

$$\rho_L = 2\pi h_2 \rho_S = 2\pi \frac{ds}{du^2} \rho_S = Q \quad (2-22)$$

qui est bien une constante, CQFD.

Notons que la densité surfacique de charge à la surface d'un conducteur cylindrique chargé peut présenter, sur d'éventuelle arêtes, des singularités [35, § 4.1 à § 4.7], qui si elles existent, sont en $\rho_S \propto |\delta s|^{-\nu}$ où l'exposant de la singularité ν prend ses valeurs entre 0,5 et 1, et où δs est la différence entre l'abscisse curviligne s du point courant et celle s_0 de la singularité. Par conséquent, selon (2-21), la coordonnée u^2 varie en $|\delta s|^\nu \operatorname{sgn}(s)$ au voisinage de la singularité de densité surfacique de charge, $\operatorname{sgn}(s)$ étant le signe de s , ce qui montre que la coordonnée u^2 est continue. Par contre, u^2 n'est pas dérivable (au sens des fonctions) sur la singularité.

Théorème 2 : Soit une définition des coordonnées curvilignes (u^1, u^2, z) dont l'existence a été démontrée dans le théorème 1. La composante tangentielle $i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2$ du vecteur courant local \mathbf{i}_v et la densité de charge linéique locale ρ_L sont définies de façon unique.

Preuve : les expressions (2-7) et (2-8) définissant $i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2$ et l'expression (2-2) définissant ρ_L ne font apparaître comme quantités liées au choix des coordonnées, que h_2 et $h_1 du^1$. Les chemins d'intégration sont fixés indépendamment du choix de u^2 , par l'invariance des surfaces $u^2 = \text{constante}$ et $z = \text{constante}$. D'après le théorème 1, h_2 est fixé et d'autre part $h_1 du^1$ est un invariant, CQFD.

Définition : Réponse tangentielle. Soit une définition des coordonnées curvilignes (u^1, u^2, z) dont l'existence a été démontrée dans le théorème 1. Nous appelons *réponse tangentielle* de l'écran généralisé le couple $(i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2, \rho_L)$ de la distribution de la composante tangentielle $i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2$ du vecteur courant local, et de la distribution de la densité de charge linéique locale ρ_L .

Nous notons que la validité de cette définition découle du théorème 2.

Définition : Réponse standard. Soit $(i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2, \rho_L)$ la réponse tangentielle de l'écran généralisé. Nous définissons les réponses standards de l'écran généralisé en nous appuyant sur l'unique décomposition de la réponse tangentielle en série définie par (2-5), (2-11) et (2-12), comme les distributions de courant et de charge non nulles suivantes :

- i) une réponse de type i_{VA0} est un courant $i_{VA}(u^2, z) = i_{VA0}(z)$;
- ii) une réponse de type ρ_{L0} est une charge linéique $\rho_L(u^2, z) = \rho_{L0}(z)$;
- iii) une réponse de type j_{VO0} est un courant linéique $j_{VO}(u^2, z) = j_{VO0}(z)$;
- iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, une réponse de type i_{VAN} est un courant $i_{VA}(u^2, z) = i_{VAN}(z) \exp(inu^2)$;
- v) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, une réponse de type ρ_{Ln} est une charge linéique $\rho_L(u^2, z) = \rho_{Ln}(z) \exp(inu^2)$;
- vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, une réponse de type j_{VO_n} est un courant linéique $j_{VO}(u^2, z) = j_{VO_n}(z) \exp(inu^2)$.

Par abus de langage, nous considérerons qu'une réponse standard est une réponse tangentielle. Selon cet abus, $\forall n \in \mathbb{N}$,

- une réponse de type i_{VAN} est identifiée à la réponse tangentielle $(i_{VAN} \mathbf{e}_z, 0)$;
- une réponse de type ρ_{Ln} est identifiée à la réponse tangentielle $(\mathbf{0}, \rho_{Ln})$;
- une réponse de type j_{VO_n} est identifiée à la réponse tangentielle $(j_{VO_n} h_2 \mathbf{e}_2, 0)$.

Nous remarquons que notre classification ne prend pas en compte les courants i_{VR} éventuels, qui n'en demeurent pas moins possibles. Leur existence n'est ni niée, ni négligée : ces courants ne sont simplement pas décrits. Ceci n'est pas une limitation importante de notre classification, car de tels courants sont habituellement associés à une réponse d'un des types que nous définissons. Comme nous l'avons déjà indiqué au § 2.3, il a été par exemple établi que le phénomène de marsouinage sur les écrans tressés peut apparaître conjointement à une réponse de type i_{VA0} .

Nous notons que les réponses tangentielles d'un écran généralisé forment un espace vectoriel. Il est donc possible de parler de combinaisons linéaires de réponses tangentielles. En utilisant l'abus de langage déjà indiqué, il est donc possible de parler de combinaisons linéaires de réponses standards, qui sera une réponse tangentielle (mais en général pas une réponse standard).

Théorème 3 : Toute réponse tangentielle d'un écran généralisé peut être écrite comme une somme de réponses standards, chacune d'un type différent, et cette décomposition est unique.

Preuve : Ce théorème est simplement la conséquence de l'existence et de l'unicité de la réponse tangentielle, et de l'unicité des décompositions en série de Fourier (2-5) (2-11) et (2-12).

Définition : Décomposition canonique. L'unique décomposition définie dans le théorème 3 est appelée *décomposition canonique* de la réponse tangentielle.

Définition : Réponse tangentielle pure. En un point z le long de l'écran généralisé, une réponse tangentielle est *localement pure* s'il n'y a qu'un terme non nul dans sa décomposition canonique en ce point. Le type de la réponse tangentielle est le type de ce terme non nul. La réponse tangentielle est *pure le long de l'écran* s'il n'y a qu'un terme non nul donné dans sa décomposition canonique, tout le long de l'écran, c'est-à-dire si sa réponse tangentielle est une réponse standard.

2.5 Réponses standards indépendantes

Soumis à un environnement électromagnétique donné, l'écran généralisé aura une réponse tangentielle dont la décomposition canonique sera une superposition de plusieurs réponses standards. Cependant, à ce stade, nous ne savons pas s'il est possible de produire une réponse tangentielle pure d'un type donné sur un écran généralisé donné, que ce soit localement, ou le long de l'écran. L'objet de ce paragraphe est de répondre à cette question, en apportant des améliorations importantes par rapport au texte publié en 2000 [53].

Définition : Indépendance physique. Pour un écran généralisé donné et pour $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de p réponses standards est dite *physiquement indépendante* si et seulement si, elles sont de types deux à deux distincts et que, pour toute famille de p quaternions réels, nous pouvons concevoir une expérience physiquement réalisable dans laquelle des sources électromagnétiques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé induisent une réponse tangentielle dont la décomposition canonique contient chacune des réponses standards de la famille, multipliée par le quaternion de même indice.

Cette définition utilise la structure triviale d'espace vectoriel de l'ensemble des réponses tangentielles. Du fait de l'orthogonalité des fonctions exponentielles dans (2-5), (2-11) et (2-12), toute famille de p réponses standards de types différents est linéairement indépendante. Par conséquent, l'indépendance physique de p réponses standards entraîne qu'elles sont linéairement indépendantes. La réciproque est évidemment fautive, parce que des lois physiques *et la structure*

de l'écran généralisé imposent des relations supplémentaires.

Théorème 4 : Pour $\omega \neq 0$, une réponse de type i_{VA0} et une réponse de type ρ_{L0} ne sont pas physiquement indépendantes, car elles sont liées par (2-17), qui entraîne que si la réponse de type i_{VA0} est connue le long de l'écran généralisé, il n'y a qu'une seule réponse de type ρ_{L0} possible.

Le théorème 4 signifie donc que les réponses de type ρ_{L0} n'ont pas à être prises en compte pour construire l'ensemble des réponses tangentielles physiquement indépendantes d'un écran généralisé. L'utilisation des réponses de type ρ_{L0} dans la théorie répond par contre au besoin d'une description locale complète de la réponse tangentielle.

Théorème 5 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, une réponse de type $i_{VA n}$, une réponse de type $j_{VO n}$ et une réponse de type ρ_{Ln} ne sont pas physiquement indépendantes, car elles sont liées par (2-18), qui entraîne que si les réponses de type $i_{VA n}$ et ρ_{Ln} sont connues le long de l'écran généralisé, il n'y a qu'une seule réponse de type $j_{VO n}$ possible.

Ainsi, pour $n \geq 1$, les réponses de type $j_{VO n}$ ne peuvent pas exister indépendamment des autres types de réponse standard, le long d'un écran généralisé. En effet, si les charges apparaissant du fait d'une telle densité de courant ne sont pas enlevées par une variation longitudinale convenable de courant $i_{VA n}$ d'amplitude convenable, alors selon (2-18) une charge linéique ρ_{Ln} apparaît.

Nous pouvons aussi dire que pour $n \geq 1$, les réponses de type $j_{VO n}$ n'ont pas à être prises en compte pour construire l'ensemble des réponses tangentielles physiquement indépendantes d'un écran généralisé. L'introduction des réponses de type $j_{VO n}$ dans la théorie répond par contre au besoin d'une description locale complète de la réponse tangentielle.

Théorème 6 : Sur un écran généralisé dont le bord externe est un conducteur électrique idéal, toute famille de réponses standards ne comportant ni réponse de type ρ_{L0} , ni réponse de type $j_{VO n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et ne comportant qu'au plus une réponse standard de chaque type, est physiquement indépendante.

Preuve : En premier lieu, nous plaçons l'écran généralisé dans le vide, avec des sources fournissant la puissance électromagnétique dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Le bord externe étant un bon conducteur électrique, nous avons $i_{VR} = 0$, et les seuls courants possibles sont des courants superficiels sur le bord externe.

En second lieu, nous considérons, en l'absence des dites sources électromagnétiques, une famille de p réponses standards selon l'énoncé du théorème. Pour toute famille de p quaternions réels, nous pouvons considérer la réponse tangentielle égale à la somme des produits de chaque réponse standard par le quaternion de même indice. A partir de cette réponse tangentielle, nous pouvons manifestement créer une nouvelle réponse tangentielle en lui ajoutant des réponses de type ρ_{L0} , et de type j_{VO_n} de telle façon que (2-17) et (2-18) soient vérifiées.

Il suffit d'invoquer le théorème de l'Annexe B pour que le théorème 6 soit démontré, car la décomposition canonique de la nouvelle réponse tangentielle contient chacune des réponses standards de la famille, multipliée par le quaternion de même indice.

Théorème 7 : Si le bord externe d'un écran généralisé est un conducteur électrique idéal :

- (i) il est toujours possible d'utiliser des sources électromagnétiques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé pour créer une configuration de champs qui induira une réponse tangentielle pure le long de l'écran, de type j_{VO_0} ou bien, $\forall n \in \mathbb{N}$, de type i_{VA_n} indépendante de z ;
- (ii) il est toujours possible d'utiliser des sources électromagnétiques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé pour créer une configuration de champs qui induira une réponse tangentielle localement pure de type quelconque.

Preuve : Pour une réponse tangentielle égale soit à une réponse standard de type j_{VO_0} , soit à une réponse standard de type i_{VA_n} indépendante de z , nous notons que (2-17) et (2-18) sont automatiquement vérifiées. Le théorème de l'Annexe B s'applique donc, ce qui démontre (i).

Pour établir le (ii), qui concerne des propriétés locales, $\forall n \in \mathbb{N}$, considérons une réponse standard de type ρ_{Ln} . Pour vérifier (2-17) ou (2-18) selon le cas, nous pouvons lui adjoindre une réponse standard de type i_{VA_n} dont la dérivée par rapport à z est appropriée, telle que $i_{VA_n}(z_0) = 0$. En utilisant le théorème de l'Annexe B, nous pouvons déterminer des sources produisant la réponse tangentielle $(i_{VA} \mathbf{e}_z, \rho_L)$, qui est localement pure en $z = z_0$.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, considérons une réponse standard de type j_{VO_n} . Pour vérifier (2-18), nous pouvons lui adjoindre une réponse standard de type i_{VA_n} dont la dérivée par rapport à z est appropriée, telle que $i_{VA_n}(z_0) = 0$. En procédant comme ci-dessus, nous pouvons déterminer des sources produisant la réponse tangentielle $(i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2, 0)$, qui est localement pure en $z = z_0$.

2.6 Méthode générale de calcul des réponses standards

La détermination des réponses standards est basée sur les développements en série de Fourier de (2-5), (2-11) et (2-12) appliqués à la densité de charge linéique locale ρ_L définie par (2-2) et à la composante tangentielle $i_{VA} \mathbf{e}_z + j_{VO} h_2 \mathbf{e}_2$ du vecteur courant local \mathbf{i}_V défini par (2-7) et (2-8). Le seul point délicat dans la détermination des réponses standards est donc le calcul de coordonnées curvilignes conformes aux hypothèses du théorème 1 du § 2.4. Dans ce paragraphe, nous allons exposer une méthode pour le calcul des coordonnées u^1 et u^2 dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé et sur le bord externe C_E . Cette méthode sera ensuite utilisée dans les trois paragraphes suivants, où seront traités trois formes de bord externe de l'écran généralisé : le cylindre de révolution, le cylindre elliptique et le cylindre à section rectangulaire.

La détermination des coordonnées u^1 et u^2 selon les hypothèses du théorème 1 étant un problème dans le plan, nous l'aborderons naturellement sous l'angle des fonctions analytiques. Pour résoudre le problème d'un bord externe C_E matérialisé par une paroi conductrice électrique, chargé, seul objet dans l'espace, nous considérerons le potentiel complexe ζ correspondant, qui est une fonction analytique [Annexe C] pouvant être calculée par diverses approches. La partie réelle V de ζ est le potentiel électrique, et nous notons F l'opposé de la partie imaginaire de ζ , qui est généralement appelé la fonction flux.

Nous savons [Annexe C, § C-1 et § C-2] que les lignes $F = \text{constante}$ sont des lignes de champ, et que le flux du champ électrique (par unité de longueur dans la direction Oz) entre les lignes de champ $F = F_1$ et $F = F_2$ est simplement $F_2 - F_1$. En particulier, le long du bord externe C_E matérialisé par une paroi conductrice électrique, la densité surfacique de charge de la distribution superficielle vaut :

$$\rho_s = \varepsilon_0 \frac{dF}{h_2 du^2} \quad (2-23)$$

Dans le cas qui nous intéresse, nous supposons que la distribution superficielle est la distribution d'équilibre électrostatique de l'écran généralisé chargé seul dans l'espace. Selon (2-20) nous avons :

$$Q = 2\pi h_2 \rho_s = 2\pi \varepsilon_0 \frac{dF}{du^2} \quad (2-24)$$

où Q est la charge sur l'écran généralisé, par unité de longueur le long de l'axe Oz . Nous voyons donc que, si le potentiel complexe ζ est produit par la charge linéique $Q = \pm 2\pi \varepsilon_0 \times 1$ Volt, alors u^2 est défini à une constante additive près par $u^2 = \pm F / 1$ Volt.

2.7 Cas d'un bord externe cylindrique de révolution

Considérons un écran généralisé dont le bord externe est un cylindre de révolution. Nous ne supposons *pas* que l'écran généralisé ou ses bords sont des conducteurs électriques idéaux.

Si Oz est l'axe du cylindre de révolution constitué par le bord externe, une valeur possible du potentiel complexe défini au § 2.6 est [Annexe C, équ. (C-20)] :

$$\zeta = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x+iy}{a} \quad (2-25)$$

où a est une longueur arbitraire,

si bien que nous avons :

$$\begin{cases} V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2+y^2} \\ F = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \arg(x+iy) \end{cases} \quad (2-26)$$

Ainsi, selon (2-24) nous pouvons prendre $u^2 = \theta$, θ étant l'argument de la variable complexe $x+iy$, et choisir les coordonnées (u^1, u^2, z) simplement égales aux coordonnées (r, θ, z) des coordonnées cylindriques (de révolution), dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé et sur son bord externe. Nous avons, pour ces coordonnées $h_1 = 1$ et $h_2 = r$.

Dans le cas où le bord interne de l'écran généralisé est un cylindre de révolution coaxial au bord externe, les coordonnées (r, θ, z) sont conformes aux hypothèses du théorème 1 à l'intérieur de l'écran généralisé, et en notant r_I et r_E les rayons du bord interne et du bord externe, nous avons :

$$\rho_L(\theta, z) = 2\pi \int_{r_I}^{r_E} \rho r \, dr \quad (2-27)$$

et

$$\mathbf{i}_V = i_{VR} \mathbf{e}_r + j_{VO} r \mathbf{e}_\theta + i_{VA} \mathbf{e}_z \quad (2-28)$$

avec

$$\begin{cases} i_{VR} = 2\pi \int_{r_I}^{r_E} r \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r \, dr \\ j_{VO} = 2\pi \int_{r_I}^{r_E} \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\theta \, dr \\ i_{VA} = 2\pi \int_{r_I}^{r_E} r \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z \, dr \end{cases} \quad (2-29)$$

2.8 Cas d'un bord externe cylindrique à section droite elliptique

Considérons à présent un écran généralisé dont le bord externe est un cylindre elliptique, c'est-à-dire un cylindre à section droite elliptique. Nous ne supposons *pas* que l'écran généralisé ou ses bords sont des conducteurs électriques idéaux. Soit a le demi-grand axe et b le demi-petit axe de l'ellipse, dont l'équation paramétrique est donc, pour un choix convenable de l'axe Oz et de l'orientation de Ox :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (2-30)$$

Une valeur possible du potentiel complexe défini au § 2.6 est [Annexe C, équ. (C-26)] :

$$\zeta = V_0 + \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \left(\alpha - \arg \cosh \frac{x + iy}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \quad (2-31)$$

où V_0 est le potentiel (arbitraire) du bord de l'ellipse, et où α est la constante sans dimension.

$$\alpha = \arg \tanh \left(\frac{b}{a} \right) \quad (2-32)$$

A partir de cette expression, nous pouvons déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point à partir du potentiel et du flux, avec

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - b^2} \cosh \left[\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q} (V - V_0) - \alpha \right] \cos \left[\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q} F \right] \\ y = -\sqrt{a^2 - b^2} \sinh \left[\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q} (V - V_0) - \alpha \right] \sin \left[\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q} F \right] \end{cases} \quad (2-33)$$

Cette expression nous donne directement, sous forme paramétrique, les lignes équipotentielles, qui sont des ellipses homofocales, et les lignes de champ, qui sont des hyperboles homofocales.

Sur l'ellipse, en posant $V = V_0$ dans (2-33), nous obtenons une expression qui, comparée à (2-30) nous donne :

$$t = \frac{2\pi\varepsilon_0}{Q} F \quad (2-34)$$

Cette expression, par application du théorème de Gauss au flux Q/ε_0 obtenu en faisant varier t de 2π , nous permet de vérifier que Q est bien la charge linéique totale.

Ainsi, selon (2-24) nous pouvons prendre, dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé

et sur son bord externe, les coordonnées (u^1, u^2, z) égales aux coordonnées (ξ_1, ξ_2, z) où ξ_1 et ξ_2 sont les coordonnées elliptiques [5, p. 503], qui correspondent respectivement à $-V$ et F pour $Q = 2\pi\epsilon_0 \times 1$ Volt. A titre d'exemple, la Figure 2-3 montre un calcul de V et $F = u^2$. Nous notons la coupure dans le plan.

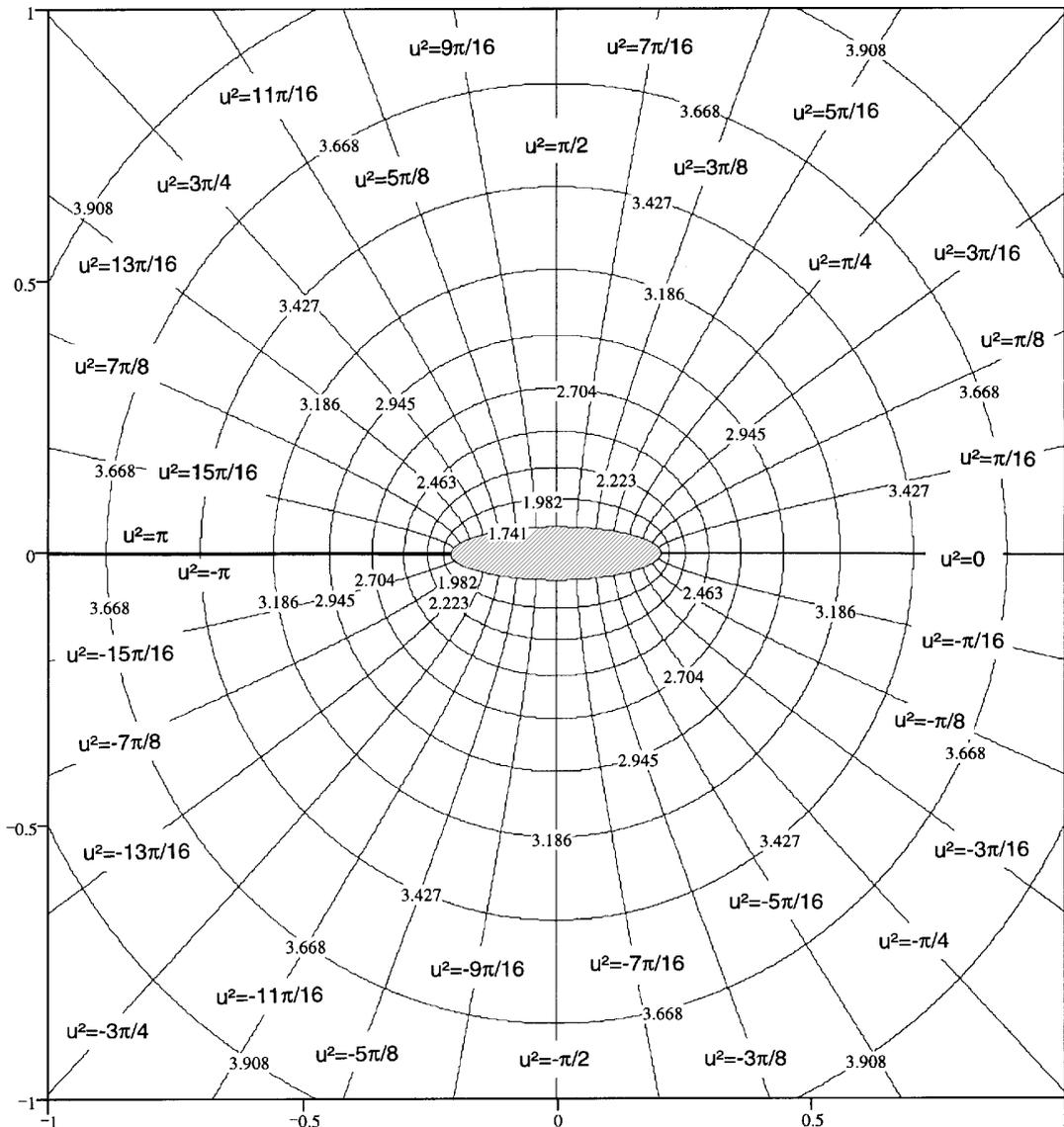


Fig. 2-3 : coordonnées pour un bord externe de section droite elliptique

Il faut noter que les coordonnées (u^1, u^2, z) ainsi définies peuvent être appelées *coordonnées cylindriques elliptiques* [52, p. 529] pour $V_0 = 0$ V et $\alpha = 0$, mais ne correspondent pas aux *coordonnées elliptiques confocales* [3, § 1.18] [5, p. 514 et p. 657] [52, p. 299].

De (2-34) nous pouvons tirer le champ complexe donné par :

$$E_x - iE_y = -\frac{d\zeta}{dx + idy} \quad (2-35)$$

ce qui donne :

$$E_x - iE_y = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+iy)^2 - (a^2 - b^2)}} \quad (2-36)$$

A l'aide de (2-38) et (2-36), nous établissons facilement que, sur le bord externe de l'écran généralisé, la densité de charge surfacique vaut :

$$\rho_s = \frac{Q}{2\pi ab} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \quad (2-37)$$

En partant de (2-33), nous calculons simplement que h_1 et h_2 sont donnés par :

$$h_1 = h_2 = \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\cosh^2(u^1 + \alpha) - \cos^2 u^2} \quad (2-38)$$

dont nous déduisons directement h_1 et h_2 sur le bord externe :

$$h_1 = h_2 = ab \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad (2-39)$$

Enfin, il est rassurant de remarquer que l'utilisation de (2-20), avec (2-37) permet d'obtenir (2-39) sans utilisation de (2-38).

2.9 Cas d'un bord externe cylindrique à section droite rectangulaire

Traisons à présent le cas d'un écran généralisé dont le bord externe est un cylindre à section rectangulaire. Nous ne supposons *pas* que l'écran généralisé ou ses bords sont des conducteurs électriques idéaux. Nous supposerons que a est le grand côté et b le petit côté du rectangle. Nous utiliserons comme équation :

$$\begin{cases} y=0 \text{ or } y=-b & \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ x=-\frac{a}{2} \text{ or } x=\frac{a}{2} & \text{pour } y \in [-b, 0] \end{cases} \quad (2-40)$$

Nous allons utiliser le potentiel complexe connu d'un fil fin en $X=0$ et $Y=1$, chargé avec une charge linéique Q , placé au dessus d'un plan de masse infini [8, p. 209] en $Y=0$, qui vaut :

$$\zeta = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{X+i(Y+1)}{X+i(Y-1)}\right) \quad (2-41)$$

Nous faisons à présent correspondre ce problème à celui du potentiel complexe défini au § 2.6, par la transformation de Schwarz-Christoffel [Annexe C, § C-5 et § C-6] [10, p. 314[†]] représentée sur la fig. 2-4 :

$$x + iy = \frac{A}{k} \int_0^{X+iY} \frac{\sqrt{(h^2 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (2-42)$$

où h et k sont définis comme une solution de :

$$\begin{cases} \int_h^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{(t^2 - h^2)(1 - k^2 t^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{2b}{a} \int_0^h \frac{\sqrt{(h^2 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt \\ \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{\sqrt{(t^2 - h^2)(k^2 t^2 - 1)}}{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^h \frac{\sqrt{(h^2 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt \end{cases} \quad (2-43)$$

et A par :

$$A = \frac{b}{\int_h^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{(t^2 - h^2)(1 - k^2 t^2)}}{(t^2 + 1)^2} dt} \quad (2-44)$$

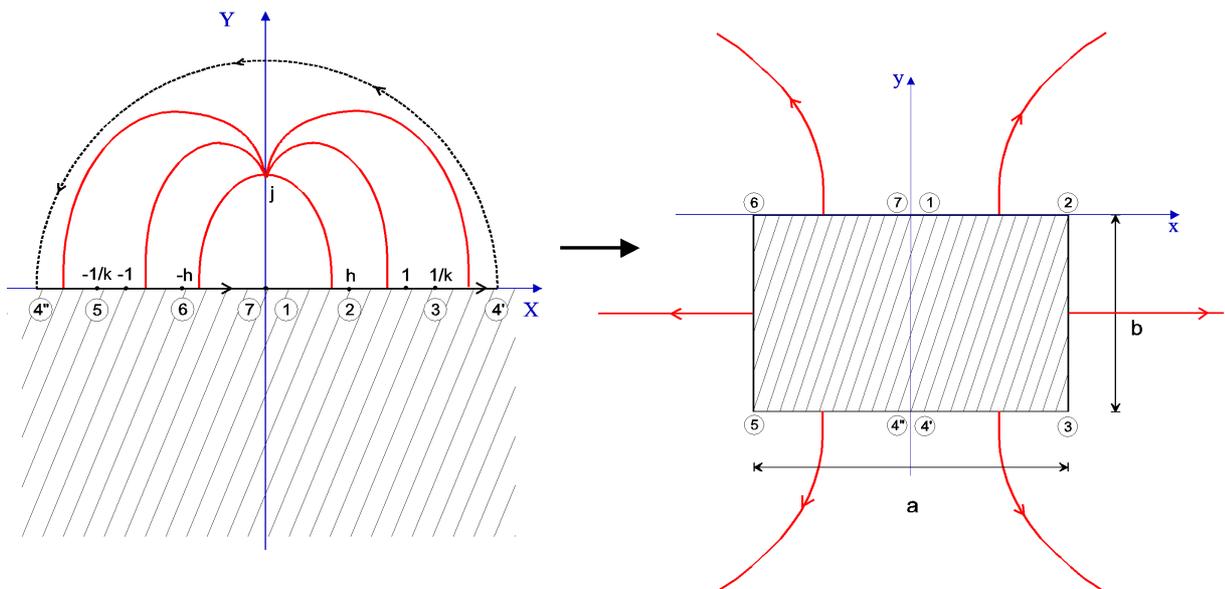


Fig. 2-4 : la transformation de Schwarz-Christoffel utilisée

[†] Les expressions (365), (366) et (367) de [10] doivent être modifiées, car nous ne pouvons pas imposer arbitrairement $h = 1$.

Cette transformation fait correspondre l'axe réel $Y = 0$ au bord externe de l'écran défini par (2-40), le demi-plan ouvert $Y > 0$ à l'espace entourant l'écran et le point de coordonnées $X = 0$ et $Y = 1$ à l'infini. Nous notons que la partie réelle V du potentiel complexe est nulle sur le bord externe de l'écran.

La résolution numérique de (2-43) et (2-44) ne pose pas de problème. Les formules (2-41) et (2-42) deviennent alors un outil simple et efficace pour déterminer le potentiel en tout point de l'espace. En particulier, sur le bord externe de l'écran, nous avons $Y = 0$, et l'examen de (2-41) montre que nous obtenons :

$$F = \frac{-Q}{\pi \varepsilon_0} \arg(X + i) \quad (2-45)$$

En utilisant (2-24) et en adoptant $u^2 = F + \pi$ pour $Q = 2 \pi \varepsilon_0$ nous obtenons l'expression miraculeuse :

$$u^2 = \pi - 2 \arctan\left(\frac{1}{X}\right) \quad (2-46)$$

sur le bord externe de l'écran, qui correspond à une coupure en $X = 0$. Notons que pour $X \geq 0$ nous avons :

$$u^2 = 2 \arctan X \quad (2-47)$$

sur le bord externe de l'écran généralisé. Les expressions (2-42) et (2-46) permettent de trouver très efficacement la position de chaque point du bord externe de l'écran correspondant à une coordonnée u^2 donnée, puis d'étendre la définition de u^2 au volume à l'extérieur de l'écran généralisé. C'est ce que nous avons fait sur la Figure 2-5 dans le cas $a = 2b$: après avoir tracé le bord externe (courbe $V = 0$), nous avons tracé des courbes $u^2 = \text{constante}$. Celles-ci ont été obtenues en intégrant (2-42) le long des lignes de champ, qui selon (2-41) sont déterminées par :

$$X + i Y = i \frac{\exp(V + i[\pi - u^2]) + 1}{\exp(V + i[\pi - u^2]) - 1} \quad (2-48)$$

avec u^2 constant et V paramètre variable prenant la valeur 0 sur le bord externe de l'écran.

Cette construction est particulièrement intéressante car elle montre que la coordonnée u^2 peut être aisément définie pour un bord externe présentant des angles, sans avoir à recourir à des méthodes numériques de calcul pour un problème à deux dimensions. En effet, la résolution de (2-43) et (2-44) est un problème à une dimension.

Le calcul présenté illustre aussi le commentaire sur la continuité de la coordonnée u^2 , qui

suivait la démonstration du théorème 1 du § 2.4 : bien que le bord externe présente des angles, u^2 est continue.

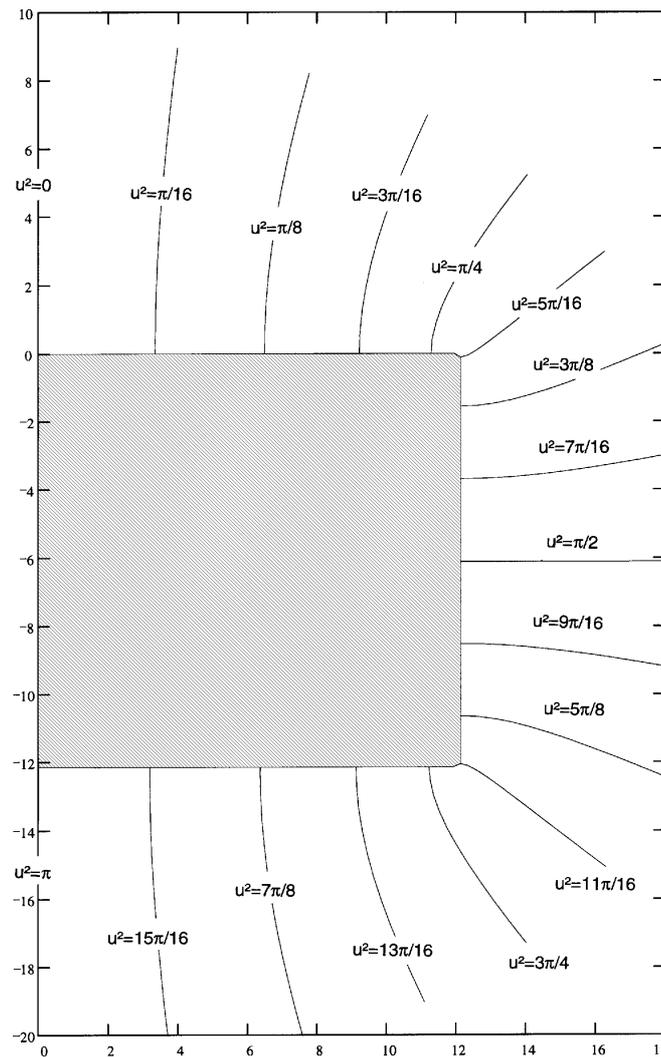


Fig. 2-5 : coordonnées pour un bord externe ayant une section droite rectangulaire (seulement la moitié du cylindre est montrée)

2.10 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre défini une classification des réponses d'un écran généralisé cylindrique soumis à une agression électromagnétique extérieure. De nombreux aspects de la théorie présentée sont très généraux, dans la mesure où elle n'est limitée ni dans le domaine fréquentiel, ni par la forme de la section droite de l'écran généralisé. Cependant, les calculs n'ont été vraiment simples que dans le cas d'un écran possédant la symétrie de révolution.

Chapitre 3 : Utilisation des quaternions

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, *quaternion* et *nombre hypercomplexe* désigneront les mêmes êtres mathématiques que nous avons utilisés à partir du § 2.3. L'utilisation originale des quaternions par Hamilton, en tant que somme d'un scalaire et d'un vecteur de l'espace euclidien de dimension 3, n'a jamais été très populaire en physique. En effet, les vecteurs, qui furent aussi introduits par Hamilton et définis comme une partie d'un quaternion [11, ch. 1 § 1 and § 4], furent dissociés du concept de quaternion par Gibbs, et connurent un succès indépendant. Maxwell, par exemple, expliquait que les vecteurs de Hamilton étaient naturels pour décrire les quantités physiques (sans ces vecteurs, les physiciens travaillaient directement sur les coordonnées), mais que l'apprentissage du calcul des quaternions pouvait être évité [1, § 10, § 11 et § 618].

Cependant, l'emploi des quaternions s'avère avantageux pour traiter nombre de questions. Dans le domaine de l'ingénierie électrique, des articles récents utilisant les quaternions concernent le traitement numérique du signal [55], et l'électromagnétisme fondamental [54] [59]. Ces applications ne sont pas liées à celle que nous allons aborder ci-dessous, qui figure dans deux articles [53] [56] [58] employant les quaternions pour traiter d'écrans cylindriques.

Le premier objet de ce chapitre est de compléter les notions de bases de l'Annexe A en vue d'établir rigoureusement la formule hypercomplexe de conservation de la charge sur l'écran cylindrique isolé, constituée de (2-17) et (2-18), qui a été établie un peu intuitivement au § 2.3. Le second objet de ce chapitre est, plus généralement, de discuter l'intérêt de l'emploi des quaternions dans cette expression, et de préciser les règles applicables aux amplitudes hypercomplexes obtenues par transformée de Fourier. Enfin, en utilisant ces règles, nous déterminerons les amplitudes hypercomplexes pour les ondes cylindriques.

3.2 La formule hypercomplexe de conservation de la charge sur l'écran isolé

En partant de (2-15) nous pouvons directement établir :

$$\frac{\partial i_{VA}}{\partial z}(u^2, z, t) + \frac{\partial j_{VO}}{\partial u^2}(u^2, z, t) + \frac{\partial \rho_L}{\partial t}(u^2, z, t) = 0 \quad (3-1)$$

où t est le temps, où $\rho_L(u^2, z, t)$ est la densité de charge linéique locale (exprimée en C/m) définie par (2-2), où $i_{VA}(u^2, z, t)$ et $j_{VO}(u^2, z, t)$ sont respectivement un courant (exprimé en A) et une densité linéique de courant (exprimée en A/m) définis par (2-7) et (2-8), et où nous avons explicitement indiqué la dépendance de chacune des distributions ρ_L , i_{VA} et j_{VO} vis-à-vis des trois variables réelles u^2 , z et t . Nous supposons que ce sont toutes des distributions tempérées, si bien que leurs transformées de Fourier sont toujours définies [20, ch. VIII] et sont elles-mêmes des distributions tempérées.

Considérons le développement en série de Fourier de $\rho_L(u^2, z, t)$ par rapport à l'azimut u^2 :

$$\rho_L(u^2, z, t) = \rho_{L0}(z, t) + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{Ln}(z, t) \exp(\mathbf{i} n u^2) \right] \quad (3-2)$$

avec

$$\rho_{L0}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_L(u^2, z, t) du^2 \quad (3-3)$$

et pour n non nul

$$\rho_{Ln}(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_L(u^2, z, t) \exp(-\mathbf{i} n u^2) du^2$$

où $\rho_L(u^2, z, t)$ et $\rho_{L0}(z, t)$ sont réelles, et où, pour $n \geq 1$, $\rho_{Ln}(z, t) \in \mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$. Pour établir cette expression, nous avons noté que $\rho_L(u^2, z, t)$ étant réel, nous pouvons profiter de la symétrie hermitienne en n'utilisant que des indices positifs ou nuls. Nous avons aussi utilisé le fait que les coefficients complexes $\rho_{Ln}(z, t)$ de la série de Fourier peuvent être considérés comme des quaternions de $\mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$. Chaque valeur de n correspond à un terme de (3-2) ayant une périodicité différente par rapport à l'azimut : pour $n = 0$, le terme est indépendant de u^2 , tandis que pour $n > 0$ la période par rapport à u^2 est $2\pi/n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant les distributions réelles $\operatorname{Re}(\rho_{Ln}(z, t))$ et $\operatorname{Im}_{\mathbf{i}}(\rho_{Ln}(z, t))$, nous pouvons écrire :

$$\rho_{Ln}(z, t) = \operatorname{Re}(\rho_{Ln}(z, t)) + \mathbf{i} \operatorname{Im}_{\mathbf{i}}(\rho_{Ln}(z, t)) \quad (3-4)$$

A présent, les distributions $\operatorname{Re}(\rho_{Ln}(z, t))$ et $\operatorname{Im}_{\mathbf{i}}(\rho_{Ln}(z, t))$ étant réelles, nous pouvons leur appliquer une transformation de Fourier par rapport au temps, avec une intégration sur $]-\infty, \infty[$ ou sur $[0, \infty[$ en utilisant à nouveau la symétrie hermitienne. Nous obtenons :

$$\operatorname{Re}[\rho_{Ln}(z, t)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Rn}(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} f_{Rn}(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \quad (3-5)$$

avec

$$f_{Rn}(z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[\rho_{Ln}(z, t)] e^{-j\omega t} dt \quad (3-6)$$

et
$$\text{Im}_i[\rho_{L_n}(z, t)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{I_n}(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} f_{I_n}(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \quad (3-7)$$

avec
$$f_{I_n}(z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}_i[\rho_{L_n}(z, t)] e^{-j\omega t} dt \quad (3-8)$$

où nous avons utilisé la possibilité d'effectuer la transformée de Fourier dans le plan $\mathbb{R} + j\mathbb{R}$.

Nous définissons [61] l'amplitude hypercomplexe $\rho_{L_n}(z, \omega)$ par le quaternion :

$$\rho_{L_n}(z, \omega) = f_{R_n}(z, \omega) + f_{I_n}(z, \omega) \mathbf{i} \quad (3-9)$$

Nous pouvons alors vérifier que :

$$\rho_{L_n}(z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \rho_{L_n}(z, \omega) d\omega = \text{Co}_i \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \rho_{L_n}(z, \omega) d\omega \right] \quad (3-10)$$

avec
$$\rho_{L_n}(z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \rho_{L_n}(z, t) dt \quad (3-11)$$

A ce stade, nous devons noter que (3-10) résulte de l'absence, au cours du calcul, d'interférence entre les termes contenant un \mathbf{i} et les termes contenant un \mathbf{j} : il n'apparaît pas de nombre réel lorsque ces deux nombres sont multipliés. Ceci n'aurait pas été vrai si nous avions choisi d'utiliser \mathbf{i} au lieu de \mathbf{j} dans (3-5) à (3-8). En utilisant (3-2) et (3-10) et en inversant l'ordre de la sommation et de l'intégration, nous obtenons :

$$\rho_L(u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{L_n}(z, \omega) e^{inu^2} \right\} d\omega \right] \quad (3-12)$$

où il faut prendre garde à ce que pour $n \geq 1$, les amplitudes hypercomplexes $\rho_{L_n}(z, \omega)$ ne commutent pas avec les exponentielles. Les amplitudes hypercomplexes de $i_{VA_n}(z, \omega)$ et $j_{VO_n}(z, \omega)$ sont définies avec des expressions similaires à (3-2) à (3-9), respectivement à partir des quantités réelles $i_{VA}(u^2, z, t)$ et $j_{VO}(u^2, z, t)$. Ces amplitudes hypercomplexes ont évidemment des propriétés similaires à (3-10) à (3-12).

Nous pouvons à présent calculer les trois dérivées partielles qui apparaissent dans (3-1). Pour la dérivée partielles de i_{VA} , nous obtenons directement :

$$\frac{\partial i_{VA}}{\partial z}(u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial i_{VA_n}}{\partial z}(z, \omega) e^{inu^2} \right\} d\omega \right] \quad (3-13)$$

Pour la dérivée partielle de j_{VO} , en utilisant (A-15) de l'annexe A, nous obtenons :

$$\frac{\partial j_{VO}}{\partial u^2}(u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_{VO_n}(z, \omega) n e^{i n u^2} \right\} \mathbf{i} d\omega \right] \quad (3-14)$$

Pour la dérivée partielle de ρ_L , en utilisant (A-16) de l'annexe A, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t}(u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \mathbf{j} \omega \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{L_n}(z, \omega) e^{i n u^2} \right\} d\omega \right] \quad (3-15)$$

En utilisant (3-1), (3-13), (3-14) et (3-15) nous obtenons l'équation suivante, valide pour toute valeur de z , de t et de u^2 :

$$\text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial i_{VA_n}}{\partial z}(z, \omega) + j_{VO_n}(z, \omega) n \mathbf{i} + \mathbf{j} \omega \rho_{L_n}(z, \omega) \right\} e^{i n u^2} d\omega \right] = 0 \quad (3-16)$$

Il est facile de montrer que, pour toute fonction hypercomplexe continue $\alpha(\omega)$ et pour toute suite hypercomplexe β_n nous avons :

$$\left\{ \forall t, \text{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{j\omega t} \alpha(\omega) d\omega \right] = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \forall \omega \geq 0, \text{Co}_j(\alpha(\omega)) = 0 \right\} \quad (3-17)$$

$$\left\{ \forall u^2, \text{Co}_j \left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{i n u^2} \right] = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \forall n \geq 0, \beta_n = 0 \right\} \quad (3-18)$$

Nous en déduisons immédiatement que (3-1) est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq 0 \quad \frac{\partial i_{VA_n}}{\partial z}(z, \omega) + n j_{VO_n}(z, \omega) \mathbf{i} + \mathbf{j} \omega \rho_{L_n}(z, \omega) = 0 \quad (3-19)$$

qui est bien la formule hypercomplexe de conservation de la charge sur l'écran cylindrique isolé, déjà énoncée au § 2.3. Nous notons qu'un autre choix aurait pu être fait dans (3-9), en ce qui concerne l'ordre des facteurs ne commutant pas, et qu'il aurait conduit à des résultats ultérieurs différents.

Nous pouvons aussi énoncer que d'autres équations linéaires similaires à (3-1), contenant des quantités réelles dépendant de l'azimut u^2 et de t peuvent être transformées en une équation similaire à (3-19), contenant des amplitudes hypercomplexes dépendant de la variable positive ω et de l'indice positif n .

3.3 Passage incorrect dans le domaine fréquentiel

Partons à nouveau de (3-1), en utilisant cette fois des nombres complexes au lieu des quaternions. En utilisant la définition (2-5), qui est la version complexe de (3-2) et les définitions (2-11) et (2-12), nous obtenons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial i_{VA n}}{\partial z}(z, t) + j n j_{VO n}(z, t) + \frac{\partial \rho_{L n}}{\partial t}(z, t) = 0 \quad (3-20)$$

où j est l'élément habituel de \mathbb{C} , dont le carré vaut -1 . Pour $n = 0$, $\rho_{L 0}$, $i_{VA 0}$, et $j_{VO 0}$ sont des nombres réels. Pour $n \geq 1$, $\rho_{L n}$, $i_{VA n}$, et $j_{VO n}$ sont des éléments de \mathbb{C} , et leur phase représentent un azimut initial. Pour obtenir l'expression applicable à une excitation harmonique temporelle à la pulsation ω_0 , nous pouvons penser à simplement remplacer la dérivée temporelle dans (3-20) par $j\omega_0$. Si nous mettons en oeuvre ce "passage naïf dans le domaine fréquentiel", nous obtenons :

$$\frac{\partial i_{VA n}}{\partial z}(z, \omega_0) + j \left[n j_{VO n}(z, \omega_0) + \omega_0 \rho_{L n}(z, \omega_0) \right] = 0 \quad (3-21)$$

Dans cette formule, la multiplication par le même nombre complexe j semble représenter soit une "rotation" de $\Delta u^2 = \pi/2n$, soit un déphasage de $\Delta t = \pi/2\omega_0$. C'est étrange.

Par exemple, nous pouvons envisager une source fournissant la puissance électromagnétique, qui produit une excitation harmonique temporelle à la pulsation ω_0 , dans un dispositif tel que la composante de la densité de courant parallèle à Oz est partout négligeable le long d'un écran généralisé. Dans ce cas, pour tout u^2 et pour tout z , nous avons $i_{VA}(u^2, z, t) = 0$. Donc, pour tout n et pour tout z , nous avons $i_{VA n}(z, \omega) = 0$. Si le "passage naïf dans le domaine fréquentiel" était correct, nous pourrions affirmer que, dans le domaine fréquentiel,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R} \quad n j_{VO n}(z, \omega_0) + \omega_0 \rho_{L n}(z, \omega_0) = 0 \quad (3-22)$$

Nous notons qu'il est physiquement évident, d'après (3-1), pour $n \neq 0$, d'une part que l'amplitude de la charge est maximale là où la dérivée partielle de j_{VO} par rapport à l'azimut est maximale, et d'autre part que la charge et j_{VO} sont, dans le temps, en quadrature. Pour $n \neq 0$, l'équation (3-22) signifie malheureusement que les charges apparaissent en même temps que les variations de j_{VO} , avec une amplitude maximale de la charge au même azimut que l'amplitude maximale de j_{VO} . Elle est donc fautive.

3.4 Utilisation d'une transformée de Fourier complexe

Convertir une formule dans le domaine temporel en une formule dans le domaine fréquentiel peut être vu comme la mise en oeuvre d'une transformée de Fourier. Souvent, nous considérons la transformée de Fourier d'une fonction réelle $f(t)$, qui est une fonction complexe $f(\omega)$ présentant la symétrie hermitienne

$$f(-\omega) = \overline{f(\omega)} \quad (3-23)$$

qui permet de limiter le domaine d'intégration de la transformée de Fourier inverse à $[0, \infty[$. Nous avons utilisé cette propriété, qui s'étend aux distributions tempérées, à plusieurs reprises au § 3.2. Physiquement, elle signifie qu'il est possible de ne considérer que les ω positifs. Par exemple, pour un problème électromagnétique linéaire impliquant des sources harmoniques temporelles à une seule pulsation ω_0 , nous n'aurons à prendre en compte que la solution obtenue pour $\omega = \omega_0$.

Cependant, nous pouvons bien sûr aussi considérer la transformée de Fourier d'une fonction complexe, qui est une fonction complexe. Dans ce cas (3-23) ne s'applique pas. Nous pouvons cependant suivre un cheminement similaire à celui du § 3.2, avec deux différences principales :

- nous appliquons la transformée de Fourier usuelle aux coefficients des séries de Fourier (2-5), (2-11) et (2-12), donc en utilisant des nombres complexes au lieu des quaternions,
- le domaine d'intégration des transformées de Fourier inverse est $]-\infty, \infty[$.

Par exemple, si nous partons des $\rho_{Ln}(z, \omega)$ complexes de (2-5), nous obtenons :

$$\rho_{Ln}(z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t} \rho_{Ln}(z, \omega) d\omega \quad (3-24)$$

avec

$$\rho_{Ln}(z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha t} \rho_{Ln}(z, t) dt \quad (3-25)$$

Ces expressions ressemblent à (3-10) et à (3-11), mais elles sont en fait très différentes, car dans (3-24) et (3-25), $\rho_{Ln}(z, \omega)$ est une amplitude complexe pour laquelle nous devons prendre en compte les valeurs positives et négatives de ω . En utilisant (2-5) et (3-24) et en inversant l'ordre de la sommation et de l'intégration, nous obtenons :

$$\rho_L(u^2, z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{Ln}(z, \omega) e^{j\mu^2} \right\} d\omega \right] \quad (3-26)$$

En effectuant le même travail sur les deux autres termes de (3-1), nous obtenons que, pour tout z , pour tout t et pour tout u^2 :

$$\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial i_{VA n}}{\partial z}(z, \omega) + j \left[j_{VO n}(z, \omega) n + \omega \rho_{Ln}(z, \omega) \right] \right\} e^{j(nu^2 + \omega t)} d\omega \right] = 0 \quad (3-27)$$

D'où nous déduisons directement que (3-1) est équivalente à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial i_{VA n}}{\partial z}(z, \omega) + j \left[n j_{VO n}(z, \omega) + \omega \rho_{Ln}(z, \omega) \right] = 0 \quad (3-28)$$

Ce résultat ressemble à (3-21), mais les apparences sont trompeuses. En effet, pour obtenir une formule applicable à une excitation harmonique temporelle à la pulsation ω_0 , et harmonique par rapport à l'azimut avec une période $2\pi/n_0$ avec $n_0 \geq 0$, nous devons maintenant considérer que chaque quantité est la superposition d'une composante à $\omega = \omega_0$ et d'une composante à $\omega = -\omega_0$, satisfaisant toutes deux à (3-28). Dans le cas $n_0 = 0$, il en résulte simplement que les deux composantes ont la symétrie hermitienne, mais pour $n_0 \geq 1$, les équations vérifiées par les deux composantes sont véritablement différentes. Le résultat est généralement plutôt obscur.

Par exemple, si nous revenons à l'exemple du § 3.3, dans lequel pour tout u^2 et pour tout z nous avons $i_{VA}(u^2, z, t) = 0$, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} n j_{VO n}(z, \omega_0) + \omega_0 \rho_{Ln}(z, \omega_0) = 0 \\ n j_{VO n}(z, -\omega_0) - \omega_0 \rho_{Ln}(z, -\omega_0) = 0 \end{cases} \quad (3-29)$$

Nous comprenons maintenant pourquoi, pour $n \neq 0$, le calcul basé sur (3-22) était incorrect. Cependant, nous devons constater qu'il n'est pas évident de conclure quoi que ce soit directement de (3-29), car chaque quantité physique y est décrite par une combinaison de deux amplitudes complexes.

3.5 Définition alternative des amplitudes complexes

Nous pourrions penser que l'apparition de ω négatif est simplement le résultat d'un calcul maladroit, puisque seulement les ω positifs eussent été nécessaires si la transformée de Fourier par rapport au temps avait été effectuée en premier. Examinons cette option, qui consiste à prendre d'abord la transformée de Fourier, par rapport au temps, d'une quantité réelle telle que $\rho_L(u^2, z, t) = 0$, et à développer ensuite en série de Fourier la distribution complexe ainsi obtenue.

Ceci définit également des amplitudes complexes $\rho_{L_n}(z, \omega)$, mais, au lieu de (3-26), nous obtenons :

$$\rho_L(u^2, z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_{L_n}(z, \omega) e^{jnu^2} \right\} d\omega \right] \quad (3-30)$$

En traitant de la même façon les deux autres termes de (3-1), nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall \omega > 0 \quad \frac{\partial i_{VA_n}}{\partial z}(z, \omega) + j[n j_{VO_n}(z, \omega) + \omega \rho_{L_n}(z, \omega)] = 0 \quad (3-31)$$

où \mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Ici, pour obtenir une formule applicable à une excitation harmonique temporelle à la pulsation ω_0 , et harmonique par rapport à l'azimut avec une période $2\pi/n_0$ avec $n_0 \geq 0$, nous devons considérer que chaque quantité est la superposition d'une composante d'indice $n = n_0$ et d'une composante d'indice $n = -n_0$.

Si nous reprenons l'exemple discuté au § 3.3 et au § 3.4, nous obtenons cette fois-ci :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} n j_{VO_n}(z, \omega_0) + \omega_0 \rho_{L_n}(z, \omega_0) = 0 \\ n j_{VO_{-n}}(z, \omega_0) - \omega_0 \rho_{L_{-n}}(z, \omega_0) = 0 \end{cases} \quad (3-32)$$

Ce résultat est similaire à (3-29), c'est-à-dire aussi confus, car chaque quantité physique y est décrite par la combinaison de deux amplitudes complexes.

3.6 Comparaison avec l'utilisation des amplitudes hypercomplexes

A ce stade, nous pouvons constater que l'emploi d'amplitudes hypercomplexes dans (3-19) n'est nullement indispensable. Cependant [61], si des amplitudes complexes sont utilisées au lieu des amplitudes hypercomplexes, pour toute excitation harmonique temporelle et harmonique par rapport à l'azimut, caractérisée par une pulsation physique (donc positive) ω_0 et une période azimutale $2\pi/n_0$ avec $n_0 \geq 0$, chaque quantité physique doit être représentée par deux amplitudes complexes. Dans le cas des définitions du § 3.4, il faut une amplitude pour ω_0 , et une autre pour $-\omega_0$, tandis que dans le cas des définitions du § 3.5, il faut une amplitude pour n_0 , et une autre pour $-n_0$. Dans un cas comme dans l'autre, il faut donc 4 paramètres réels, de même que lorsque cette excitation est représentée par une seule amplitude hypercomplexe.

Considérons l'opération géométrique qui change les azimut u^2 d'un ensemble de points en l'azimut $u^2 + \Delta u^2$, tandis que leurs coordonnées u^1 et z demeurent inchangées. Par analogie avec le cas spécial dans lequel u^2 est l'angle θ des coordonnées cylindriques, nous appellerons cette opération une u-rotation de Δu^2 . Si nous examinons (3-12) qui contient des quaternions, nous voyons que l'opération sur les amplitudes hypercomplexes correspondant à une u-rotation de Δu^2 est une multiplication à droite de chaque $\rho_{L_n}(z, \omega)$ par $\exp(\mathbf{i} n \Delta u^2)$. Nous voyons aussi que l'opération sur les amplitudes hypercomplexes correspondant à un décalage temporel de Δt est une multiplication à gauche de chaque $\rho_{L_n}(z, \omega)$ par $\exp(\mathbf{j} \omega \Delta t)$. Clairement, ces deux opérations sur les amplitudes hypercomplexes, effectuées successivement, donnent un résultat indépendant de l'ordre de leur application. Ainsi, en accord avec la physique, ces opérations commutent, bien qu'elles agissent sur des amplitudes définies dans un corps non commutatif.

Enfin, si nous réexaminons l'exemple discuté au § 3.3, au § 3.4 et au § 3.5, cette fois en utilisant des amplitudes hypercomplexes, nous n'avons à considérer qu'une seule composante à ω_0 , et (3-19) nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R} \quad n j_{VO_n}(z, \omega_0) \mathbf{i} + \mathbf{j} \omega_0 \rho_{L_n}(z, \omega_0) = 0 \quad (3-33)$$

qui implique clairement que $\omega_0 \rho_{L_n}(z, \omega_0)$ déphasé de $\pi/2$ dans le temps est égal à $n j_{VO_n}(z, \omega_0)$ ayant subi une rotation de $\pi/2$, ce qui est bien le résultat attendu, indiqué à la fin du § 3.3.

Nous avons donc établi que, dans le problème qui nous occupe, l'utilisation d'amplitudes hypercomplexes permet de réduire de moitié le nombre de variables et d'équations à prendre en compte, par rapport à l'utilisation d'amplitudes complexes. Il en résulte que les résultats exprimés avec des amplitudes hypercomplexes peuvent être plus faciles à interpréter. Il faut enfin noter que les amplitudes hypercomplexes peuvent être facilement traduites en amplitudes complexes dépendant de l'azimut, applicables à des valeurs positives de ω et de n . En effet, en partant de (3-12), nous pouvons écrire

$$\rho_L(u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{\mathbf{j} \omega t} \rho_L(u^2, z, \omega) d\omega \right] \quad (3-34)$$

avec

$$\rho_L(u^2, z, \omega) = \text{Co}_j \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{L_n}(z, \omega) e^{\mathbf{i} n u^2} \right] \quad (3-35)$$

où les deux facteurs de l'intégrale de (3-34) sont des éléments de $\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R}$ et peuvent donc être vus comme des nombres complexes. La distribution complexe $\rho_L(u^2, z, \omega)$ est donc une amplitude complexe dépendant de l'azimut.

3.7 Amplitudes hypercomplexes pour les ondes cylindriques

Nous sommes à présent armés pour nous attaquer à la tâche, plus ambitieuse, de définir les amplitudes hypercomplexes des ondes cylindriques. Stratton [3, § 6.1] nous indique que les champs électriques et magnétiques qui satisfont des conditions aux limites données sur une surface cylindrique quelconque peuvent être dérivés d'un champ de vecteur Hertzien axial. En espace libre, sa composante axiale est une onde scalaire χ vérifiant l'équation des ondes scalaires:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \chi}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \chi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (3-36)$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions réelles ne dépendant que de u^1 et u^2 . Si α et β sont deux ondes scalaires solutions de cette équation, les composantes E_1, E_2, E_z du champ électrique et les composantes H_1, H_2, H_z du champ magnétique sont :

$$E_1(u^1, u^2, z, t) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial u^1} (u^1, u^2, z, t) - \frac{\mu_0}{h_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial u^2} (u^1, u^2, z, t) \quad (3-37)$$

$$E_2(u^1, u^2, z, t) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial u^2} (u^1, u^2, z, t) + \frac{\mu_0}{h_1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial u^1} (u^1, u^2, z, t) \quad (3-38)$$

$$E_z(u^1, u^2, z, t) = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} \right) \right] (u^1, u^2, z, t) \quad (3-39)$$

$$H_1(u^1, u^2, z, t) = \frac{\varepsilon_0}{h_2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial u^2} (u^1, u^2, z, t) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial u^1} (u^1, u^2, z, t) \quad (3-40)$$

$$H_2(u^1, u^2, z, t) = -\frac{\varepsilon_0}{h_1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial u^1} (u^1, u^2, z, t) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial u^2} (u^1, u^2, z, t) \quad (3-41)$$

$$H_z(u^1, u^2, z, t) = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \beta}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial u^2} \right) \right] (u^1, u^2, z, t) \quad (3-42)$$

Procédant comme ci-dessus pour obtenir (3-12), nous commençons par écrire une expression analogue à (3-2), soit :

$$\chi(u^1, u^2, z, t) = \chi_0(u^1, z, t) + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(u^1, z, t) \exp(\mathbf{i} n u^2) \right] \quad (3-43)$$

où $\chi(u^1, u^2, z, t)$ et $\chi_0(u^1, z, t)$ sont réels, et où, pour $n \geq 1$, $\chi_n(u^1, z, t) \in \mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant les distributions réelles $\operatorname{Re}(\chi_n(u^1, z, t))$ et $\operatorname{Im}_i(\chi_n(u^1, z, t))$, nous pouvons écrire :

$$\chi_n(u^1, z, t) = \operatorname{Re}(\chi_n(u^1, z, t)) + \mathbf{i} \operatorname{Im}_i(\chi_n(u^1, z, t)) \quad (3-44)$$

Nous utilisons à présent une transformée de Fourier en dimension 2 de ces distributions réelles, ce qui nous donne

$$\operatorname{Re}\left[\chi_n(u^1, z, t)\right] = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_{R_n}(u^1, h, \omega) e^{j(\omega t - h z)} d\omega dh\right] \quad (3-45)$$

avec

$$g_{R_n}(u^1, h, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left[\chi_n(u^1, z, t)\right] e^{-j(\omega t - h z)} dz dt \quad (3-46)$$

et

$$\operatorname{Im}_i\left[\chi_n(u^1, z, t)\right] = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_{I_n}(u^1, h, \omega) e^{j(\omega t - h z)} d\omega dh\right] \quad (3-47)$$

avec

$$g_{I_n}(u^1, h, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}_i\left[\chi_n(u^1, z, t)\right] e^{-j(\omega t - h z)} dz dt \quad (3-48)$$

où nous avons utilisé la possibilité d'effectuer les doubles transformées de Fourier dans le plan $\mathbb{R} + \mathbf{j} \mathbb{R}$. Si nous définissons l'amplitude hypercomplexe $\chi_n(u^1, h, \omega)$ comme le quaternion

$$\chi_n(u^1, h, \omega) = g_{R_n}(u^1, h, \omega) + g_{I_n}(u^1, h, \omega) \mathbf{i} \quad (3-49)$$

nous obtenons

$$\chi_n(u^1, z, t) = \operatorname{Co}_i\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{j(\omega t - h z)} \chi_n(u^1, h, \omega) d\omega dh\right] \quad (3-50)$$

avec

$$\chi_n(u^1, h, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega t - h z)} \chi_n(u^1, z, t) dz dt \quad (3-51)$$

Ici aussi, (3-50) découle de qu'il n'y a pas d'interférence entre les termes contenant un \mathbf{i} et les termes contenant un \mathbf{j} : A partir de (3-43) et (3-50), et en inversant l'ordre de la sommation et de l'intégration, nous obtenons

$$\chi(u^1, u^2, z, t) = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{j(\omega t - h z)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(u^1, h, \omega) e^{\mathbf{i} n u^2} \right\} d\omega dh\right] \quad (3-52)$$

expression dans laquelle, pour $n \geq 1$, les $\chi_n(u^1, h, \omega)$ ne commutent pas avec les exponentielles. De façon similaire, nous définissons les amplitudes hypercomplexes $\alpha_n(u^1, h, \omega)$ et $\beta_n(u^1, h, \omega)$. Comme nous pouvons considérer des espaces vectoriels sur le corps de quaternions, nous définissons [61] aussi les amplitudes hypercomplexes du champ électrique et du champ magnétique, respectivement $\mathbf{E}_n(u^1, h, \omega)$ et $\mathbf{H}_n(u^1, h, \omega)$. Le champ électrique réel $\mathbf{E}(u^1, u^2, z, t)$ et le champ magnétique réel $\mathbf{H}(u^1, u^2, z, t)$ sont donc :

$$\mathbf{E}(u^1, u^2, z, t) = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{j(\omega t - h z)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n(u^1, h, \omega) e^{\mathbf{i} n u^2} \right\} d\omega dh\right] \quad (3-53)$$

$$\mathbf{H}(u^1, u^2, z, t) = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{j(\omega t - hz)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_n(u^1, h, \omega) e^{inu^2} \right\} d\omega dh \right] \quad (3-54)$$

Comme nous avons fait pour obtenir (3-19), nous pouvons montrer que des équations telles que (3-37) à (3-42), contenant des quantités réelles dépendant des variables u^2, z et t , peuvent être transformées en des équations entre amplitudes hypercomplexes dépendant de la variable h (dont les valeurs positives et négative doivent être prises en compte), de la variable positive ω et de l'indice positif n . Ce résultat sera utilisé pour obtenir (3-55) à (3-61).

3.8 Cas du cylindre de révolution

Dans le cas des coordonnées du cylindrique de révolution, pour lesquelles $u^1 = r$ et $u^2 = \theta$, nous avons $h_1 = 1$ et $h_2 = r$. A partir de (3-37) à (3-42), de (3-52) à (3-54), de la remarque précédente, et en utilisant les composantes E_r, E_θ, E_z du champ électrique et les composantes H_r, H_θ, H_z du champ magnétique, nous obtenons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq 0, \forall r \geq 0$:

$$E_{nr}(r, h, \omega) = -j h \frac{\partial \alpha_n}{\partial r}(r, h, \omega) - \frac{j \omega n \mu_0}{r} \beta_n(r, h, \omega) \mathbf{i} \quad (3-55)$$

$$E_{n\theta}(r, h, \omega) = -\frac{j n h}{r} \alpha_n(r, h, \omega) \mathbf{i} + j \omega \mu_0 \frac{\partial \beta_n}{\partial r}(r, h, \omega) \quad (3-56)$$

$$E_{nz}(r, h, \omega) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \alpha_n}{\partial r} \right) (r, h, \omega) + \frac{n^2}{r^2} \alpha_n(r, h, \omega) \quad (3-57)$$

$$H_{nr}(r, h, \omega) = \frac{j \omega n \varepsilon_0}{r} \alpha_n(r, h, \omega) \mathbf{i} - j h \frac{\partial \beta_n}{\partial r}(r, h, \omega) \quad (3-58)$$

$$H_{n\theta}(r, h, \omega) = -j \omega \varepsilon_0 \frac{\partial \alpha_n}{\partial r}(r, h, \omega) - \frac{j h n}{r} \beta_n(r, h, \omega) \mathbf{i} \quad (3-59)$$

$$H_{nz}(r, h, \omega) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \beta_n}{\partial r} \right) (r, h, \omega) + \frac{n^2}{r^2} \beta_n(r, h, \omega) \quad (3-60)$$

Pour l'onde scalaire, en partant de (3-36) nous obtenons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq 0, \forall r \geq 0$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi_n}{\partial r} \right) (r, h, \omega) + \chi_n(r, h, \omega) \left[\frac{\omega^2}{c_0^2} - h^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] = 0 \quad (3-61)$$

où les $\chi_n(r, h, \omega)$ sont des ondes hypercomplexes. Ceci est une équation de Bessel hypercomplexe par rapport à la variable r . Les solutions de cette équation sont donc des combinaisons linéaires de deux fonctions de Bessel indépendantes d'ordre n , avec des coefficients hypercomplexes. En

gardant à l'esprit que nous n'utilisons que des valeurs positives de ω et en notant k le rapport ω/c_0 , c_0 étant la vitesse de la lumière dans le vide, définissons les solutions indépendantes $\phi_n(r, h, \omega)$ et $\psi_n(r, h, \omega)$ par les expressions suivantes [7, § 5.1].

$$\blacksquare \text{ Pour } |h| < k \quad \begin{cases} \phi_n(r, h, \omega) = H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - h^2} r) \\ \psi_n(r, h, \omega) = H_n^{(2)}(\sqrt{k^2 - h^2} r) \end{cases} \quad (3-62)$$

où $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont des fonctions de Hankel de première et de seconde espèce, avec une phase temporelle. Les ϕ_n sont des ondes cylindriques progressives se propageant vers l'axe Oz, et les ψ_n sont des ondes cylindriques progressives se propageant depuis l'axe Oz.

$$\blacksquare \text{ Pour } |h| = k \quad \begin{cases} \phi_n(r) = \begin{cases} (r/r_0)^n & \text{pour } n \neq 0 \\ 1 & \text{pour } n = 0 \end{cases} \\ \psi_n(r) = \begin{cases} (r/r_0)^{-n} & \text{pour } n \neq 0 \\ \ln(r/r_0) & \text{pour } n = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3-63)$$

où r_0 est un rayon arbitraire. La comparaison avec (C-29) de l'annexe C montre que ces ψ_n correspondent aux champs produits par un cylindre conducteur (voir aussi la discussion du § 4.9).

$$\blacksquare \text{ Pour } |h| > k \quad \begin{cases} \phi_n(r, h, \omega) = I_n(\sqrt{k^2 - h^2} r) \\ \psi_n(r, h, \omega) = K_n(\sqrt{k^2 - h^2} r) \end{cases} \quad (3-64)$$

où I_n et K_n sont des fonctions de Bessel modifiées ayant une phase temporelle, pour lesquelles nous notons que les fonctions ϕ_n et ψ_n sont réelles, et évanescentes car ψ_n décroît rapidement et ϕ_n croît rapidement, lorsque r croît.

Les deux ondes hypercomplexes α et β dont nous avons besoin pour déterminer le champ électrique et le champ magnétique sont donc :

$$\begin{cases} \alpha_n(r, h, \omega) = a_n(h, \omega)\phi_n(r, h, \omega) + c_n(h, \omega)\psi_n(r, h, \omega) \\ \beta_n(r, h, \omega) = b_n(h, \omega)\phi_n(r, h, \omega) + d_n(h, \omega)\psi_n(r, h, \omega) \end{cases} \quad (3-65)$$

où $a_n(h, \omega)$, $b_n(h, \omega)$, $c_n(h, \omega)$ et $d_n(h, \omega)$ sont des distributions tempérées déterminées par les conditions aux limites. En supprimant les encombrantes variables r , h et ω , nous introduisons (3-65) dans (3-55) à (3-60), ce qui nous donne les amplitudes hypercomplexes des composantes du champ électrique et du champ magnétique. Nous obtenons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall \omega \geq 0$, $\forall r \geq 0$:

$$E_{nr} = -\mathbf{j} h \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{j} k n \eta_0}{r} (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \mathbf{i} \quad (3-66)$$

$$E_{n\theta} = -\frac{\mathbf{j} n h}{r} (a_n \phi_n + c_n \psi_n) \mathbf{i} + \mathbf{j} k \eta_0 \left(b_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + d_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) \quad (3-67)$$

$$E_{nz} = (k^2 - h^2) (a_n \phi_n + c_n \psi_n) \quad (3-68)$$

$$H_{nr} = \frac{\mathbf{j} k n}{\eta_0 r} (a_n \phi_n + c_n \psi_n) \mathbf{i} - \mathbf{j} h \left(b_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + d_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) \quad (3-69)$$

$$H_{n\theta} = -\frac{\mathbf{j} k}{\eta_0} \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{j} h n}{r} (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \mathbf{i} \quad (3-70)$$

$$H_{nz} = (k^2 - h^2) (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \quad (3-71)$$

où η_0 est l'impédance d'onde en espace libre. Ceci constitue la démonstration de l'équation (30) de [53] corrigée dans [56], que nous utiliserons au prochain chapitre. Ces expressions peuvent être comparées aux résultats classiques des champs en coordonnées cylindriques [3, § 6.6], [7, § 5.1], qui utilisent des amplitudes complexes avec des définitions similaires à celles du § 3.5, puisque les amplitudes complexes n'y contiennent que des valeurs positives de ω . Avec ces amplitudes complexes, l'indice n prend donc des valeurs positives et des valeurs négatives.

Nous notons également que le chemin d'intégration dans (3-53) et (3-54) inclut des ondes progressives et des ondes évanescentes, et que, puisque nous utilisons des distributions tempérées dans (3-65), des singularités peuvent être présentes.

Nous voyons enfin que, comme nous avons fait à la fin du § 3.6, nous pouvons déduire le champ électrique réel $\mathbf{E}(r, \theta, z, t)$ d'un champ électrique complexe $\mathbf{E}(r, \theta, z, \omega)$ qui se calcule à partir du champ électrique hypercomplexe $\mathbf{E}_n(r, h, \omega)$, de la façon suivante

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega t} \mathbf{E}(r, \theta, z, \omega) d\omega \right] \quad (3-72)$$

avec

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, \omega) = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jh z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n(r, h, \omega) e^{jn\theta} dh \right] \quad (3-73)$$

et des expressions analogues peuvent être écrites pour le champ magnétique.

3.9 Conclusion

Il est possible de se dispenser d'utiliser les amplitudes hypercomplexes définies au § 3.2 et au § 3.7. Dans ce cas, il faut utiliser rigoureusement les amplitudes complexes, ce qui implique que, pour $n \neq 0$, la variable ω ou la variable n perdent leur signification physique, car des valeurs opposées de ω ou de n doivent être simultanément considérées.

Que nous utilisons, pour $n \neq 0$, une seule amplitude hypercomplexe avec ω et n positif pour chaque harmonique temporelle et azimutale, ou bien deux amplitudes complexes avec des valeurs opposées de ω et n , nous devons de toute façon traiter quatre paramètres réels. La discussion du § 3.6 nous montre les avantages de l'utilisation d'amplitudes hypercomplexes : ω et n ont un sens physique simple, le nombre d'équations à traiter est divisé par deux, et les effets des rotations (ou u-rotations) et des retards sont plus lisibles.

Au demeurant, les expressions hypercomplexes sont universelles, puisqu'elles peuvent être facilement converties en des expressions complexes. Cette conversion consiste simplement à :

- prendre en compte des valeurs opposées de ω ou de n selon la définition utilisée pour les amplitudes complexes, ce qui double le nombre d'inconnues et d'équations,
- remplacer les quaternions \hat{i} et \hat{j} par le nombre complexe j ,
- considérer que les amplitudes hypercomplexes deviennent des amplitudes complexes.

Lorsque nous établissons une expression hypercomplexe, nous laissons donc au lecteur le choix de l'utiliser avec des amplitudes hypercomplexes ou avec des amplitudes complexes. Le lecteur dispose encore d'une autre possibilité, celle d'interpréter les amplitudes hypercomplexes comme des amplitudes complexes dépendant de l'azimut, comme indiqué à la fin du § 3.6 et du § 3.8.

Enfin, nous noterons que la comparaison que nous venons d'effectuer entre l'utilisation d'une transformée de Fourier dans le corps des quaternions, et celle d'une transformée de Fourier dans le corps des nombres complexes, est transposable à des problèmes similaires faisant intervenir une transformée de Fourier ou un développement en série de Fourier par rapport à une seconde variable, appliquée à une transformée de Fourier ou un développement en série de Fourier par rapport à une première variable.

Chapitre 4 : Types d'excitation de l'écran cylindrique

4.1 Introduction

Après les explications et digressions mathématiques du chapitre 3, nous revenons à la théorie de l'écran généralisé cylindrique défini au § 2.2, soumis à l'action de sources fournissant la puissance électromagnétique disposées dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. A partir de la classification des réponses de l'écran, présentée dans le chapitre 2, nous allons nous atteler à la classification des excitations produites par les sources. La notion de base de cette classification est celle de réponse tangentielle localement pure en z , introduite à la fin du § 2.4.

Les *excitations standards* de la classification des excitations, nous les définirons en général, et nous les calculerons précisément pour un bord externe de révolution. Nous introduirons aussi leur *amplitude naturelle*, qui permet de les quantifier.

4.2 Définition des types d'excitation

En utilisant les notations du § 2, nous pouvons introduire la définition suivante.

Définition : Excitation standard. Pour un écran généralisé cylindrique donné, nous appelons *excitation standard* en un point z , une configuration de champs électromagnétiques produite par toutes les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, champs qui produiraient, si le bord externe C_E de l'écran était parfaitement conducteur, une réponse tangentielle localement pure en z . Le type de l'excitation standard est par définition le type de cette réponse tangentielle localement pure.

Nous notons que cette définition, qui introduit des excitations standard de type i_{VA_n} , de type ρ_{Ln} et de type j_{VO_n} , prend son sens grâce au (ii) du théorème 7 du § 2.5. La démonstration de ce dernier précise même un mode de réalisation des sources. Il convient de souligner que la notion de réponse standard est globale, dans la mesure où elle concerne tout l'écran, alors que la notion d'excitation standard est locale. Par ailleurs, nous voyons que de nombreuses configurations de champs différentes dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé peuvent être des excitations standards au même point z , d'un même type.

Nous notons que si l'écran généralisé a un bord extérieur dont la forme est différente de l'écran réel (en pratique, le matériau conducteur) qu'il contient, ou lorsque l'écran réel ne se comporte pas comme un conducteur idéal, il faut s'attendre à ce qu'une excitation standard en z , de type donné, ne produise pas exactement une réponse tangentielle localement pure de ce type.

Nous pouvons conjecturer que toute configuration de champs électromagnétiques produite par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé peut s'exprimer comme une somme unique d'excitations standards en un point z donné, chacune d'un type différent. S'il est exact, cet énoncé semble difficile à démontrer. Nous allons cependant le démontrer dans le paragraphe suivant, dans le cas d'un bord externe de révolution.

4.3 Excitations standards pour un bord externe cylindrique de révolution

Considérons un écran généralisé dont le bord externe est un cylindre de révolution de rayon r_E , comme au § 2.7. Au § 3.8, nous avons établi les expressions (3-66) à (3-71) des amplitudes hypercomplexes des composantes du champ électrique et du champ magnétique, en coordonnées cylindriques. Nous voyons que pour $|h| \geq k$, la propagation se fait uniquement selon Oz. Pour déterminer les champs dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, les ondes évanescentes ϕ_n et ψ_n données par (3-64) pour $|h| > k$ ne doivent pas être éliminées a priori, bien qu'elles ne soient pas facilement excitées car leur vitesse de phase est supérieure à celle de la lumière, et qu'elles soient fortement atténuées si le bord n'est pas parfaitement conducteur. Pour fixer les idées, nous pouvons écrire les amplitudes complexes de la forme (3-73), pour $r \geq r_E$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -jh \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - j\eta_0 \frac{k}{r} n (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \right\} \mathbf{i} \right] e^{in\theta} dh \\ E_\theta = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -j \frac{h}{r} n (a_n \phi_n + c_n \psi_n) \mathbf{i} + jk\eta_0 \left(b_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + d_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) \right\} \right] e^{in\theta} dh \\ E_z = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} (k^2 - h^2) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \phi_n + c_n \psi_n) e^{in\theta} dh \right] \\ H_r = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ j \frac{k}{\eta_0 r} n (a_n \phi_n + c_n \psi_n) \mathbf{i} - jh \left(b_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + d_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) \right\} \right] e^{in\theta} dh \\ H_\theta = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{-jk}{\eta_0} \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - j \frac{h}{r} n (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \right\} \right] e^{in\theta} dh \\ H_z = \text{Co}_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} (k^2 - h^2) \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \phi_n + d_n \psi_n) e^{in\theta} dh \right] \end{array} \right. \quad (4-1)$$

où a_n, b_n, c_n et d_n sont des distributions tempérées hypercomplexes déterminées par les conditions aux limites, a_n et c_n s'exprimant en Vm^2 , d_n et d_n s'exprimant en Am^2 .

Comme indiqué au § 3.8, pour $|h| < k$ les fonctions ϕ_n sont des ondes progressives se propageant vers l'axe Oz tandis que les fonctions ψ_n sont des ondes progressives se propageant depuis l'axe Oz, si bien que seules les composantes de champs liées aux fonctions ψ_n peuvent être causées par les courants et charges sur l'écran généralisé.

Pour $h = \pm k$ nous vérifions que a_0 et b_0 ne correspondent à aucun champ, et que pour $n \neq 0$ le champ électromagnétique ne dépend en fait que des variables u_n et v_n définies par

$$\begin{cases} u_n \delta(h - k) = a_n \pm \eta_0 b_n \mathbf{i} \\ v_n \delta(h - k) = c_n \mp \eta_0 d_n \mathbf{i} \end{cases} \quad (4-2)$$

où δ est la distribution de Dirac, qui est bien une distribution tempérée, et où u_n s'exprime en Vm et v_n en Am. Nous avons donc ici une onde TEM se propageant le long de l'axe de l'écran, et les seuls amplitudes hypercomplexes non nulles données par (3-66) à (3-71) sont :

$$\begin{cases} E_{n,r} = \mp \frac{\mathbf{j}kn}{r} e^{\mp jkz} \left(u_n (r/r_E)^n - v_n (r/r_E)^{-n} \right) \\ E_{n,\theta} = \mp \frac{\mathbf{j}kn}{r} e^{\mp jkz} \left(u_n (r/r_E)^n + v_n (r/r_E)^{-n} \right) \mathbf{i} \\ H_{n,r} = \mp \frac{1}{\eta_0} E_\theta \\ H_{n,\theta} = \pm \frac{1}{\eta_0} E_r \end{cases} \quad (4-3)$$

Pour déterminer les excitations standard, nous considérons que le bord externe C_E de l'écran est parfaitement conducteur, et nous cherchons la décomposition canonique de la réponse tangentielle (cf. la fin du § 2.4). Les conditions à respecter sur le bord conducteur électrique idéal sont $E_\theta = E_z = H_r = 0$ en $r = r_E$.

Pour $h \neq \pm k$, ces conditions sur le bord sont équivalentes à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \{-k, k\}, \forall \omega \geq 0 \quad \begin{cases} a_n \phi_n + c_n \psi_n = 0 \\ b_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + d_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (4-4)$$

si bien que, pour chaque valeur de ω , de $h \neq \pm k$, et de n , les amplitudes hypercomplexes du champ électrique et du champ magnétique dépendent de deux paramètres arbitraires.

Pour $h = \pm k$, les conditions sur le bord sont équivalentes à :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq 0 \quad \begin{cases} \forall n \neq 0 \\ d_0 = 0 \end{cases} \quad u_n + v_n = 0 \quad (4-5)$$

si bien que, compte tenu de (4-2), pour chaque valeur de ω , et de n , les amplitudes hypercomplexes du champ électrique et du champ magnétique pour $h = \pm k$, ne dépendent de d'un paramètre arbitraire.

Les expressions précédentes permettent de décrire toutes les configurations possibles de champs électromagnétiques produites par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, en considérant un bord externe parfaitement conducteur. D'autre part, toujours dans ce cas, nous déduisons, de (2-4), de (2-10) et des relations de continuité, les relations simples qui existent entre une configuration de champs et la réponse tangentielle correspondante :

$$\begin{cases} \rho_L = 2\pi r_E \varepsilon_0 E_r \\ j_{VO} = -2\pi H_z \\ i_{VA} = 2\pi r_E H_\theta \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \rho_{Ln} = 2\pi r_E \varepsilon_0 E_{rn} \\ j_{VO_n} = -2\pi H_{zn} \\ i_{VA_n} = 2\pi r_E H_{\theta n} \end{cases} \quad (4-6)$$

A ce stade, nous voyons que les composantes de H_θ d'indice n correspondent à des excitations standard de type i_{VA_n} , que les composantes de H_z d'indice n correspondent à des excitations standard de type j_{VO_n} , que les composantes de E_r d'indice n correspondent à des excitations standard de type ρ_{Ln} .

4.4 Combinaisons simples d'excitations standards pour le bord de révolution

Il est à présent possible, pour un bord externe de révolution, d'établir une liste des configurations de champ produisant, le long de l'écran généralisé, les combinaisons linéaires les plus simples d'excitations standards qu'autorisent les théorèmes 4 et 5 du § 2.5. Nous obtenons les résultats suivants.

– Une excitation standard de type i_{VA_0} , uniquement accompagnée de l'excitation standard de type ρ_{L_0} associée (théorème 4), peut être créée tout le long de l'écran généralisé avec un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h = \pm k$ avec toutes les distributions

d'amplitude nulle sauf c_0 . Ce résultat peut aussi être obtenu avec un champ électromagnétique ne comportant que des composantes correspondant à une valeur de $h \neq \pm k$ donnée, avec toutes les distributions d'amplitude nulle sauf a_0 et c_0 liées par (4-4). Nous notons que dans le cas particulier $h = 0$, il n'y a qu'une excitation standard de type i_{VA0} , ce qui correspond à un cas utilisé pour la démonstration du (i) du théorème 7 du § 2.5.

– Une excitation standard de type j_{VO0} peut être créée tout le long de l'écran généralisé, pour un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h \neq \pm k$, avec toutes les distributions d'amplitude nulle sauf b_0 et d_0 liées par (4-4).

– Pour $n \geq 1$, une excitation de type $i_{VA n}$, uniquement accompagnée de l'excitation standard de type $\rho_{L n}$ associée (théorème 5) peut être créée tout le long de l'écran généralisé, avec un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h = \pm k$ avec toutes les distributions d'amplitude nulle sauf u_n et v_n liés par (4-5). Ce résultat peut aussi être obtenu avec un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h \neq \pm k$, avec toutes les distributions d'amplitude nulle sauf a_n et c_n liées par (4-4). Nous notons que dans le cas particulier $h = 0$, il n'y a qu'une excitation standard de type $i_{VA n}$, ce qui correspond à un cas utilisé pour la démonstration du (i) du théorème 7 du § 2.5.

– Pour $n \geq 1$, une excitation de type $j_{VO n}$, uniquement accompagnée de l'excitation standard de type $\rho_{L n}$ associée (théorème 5) peut être créée tout le long de l'écran généralisé, pour un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h \neq \pm k$, avec les distributions d'amplitude a_n, c_n, b_n et d_n liées par (4-4) et la relation supplémentaire annulant H_θ , ce qui n'est réalisable que pour $h \neq 0$.

– Pour $n \geq 1$, une excitation de type $j_{VO n}$, uniquement accompagnée de l'excitation standard de type $i_{VA n}$ associée (théorème 5) peut être créée tout le long de l'écran généralisé, pour un champ électromagnétique ne comportant que des composantes $h \neq \pm k$, avec les distributions d'amplitude a_n, c_n, b_n et d_n liées par (4-4) et la relation supplémentaire annulant E_r , ce qui n'est réalisable que pour $h \neq 0$.

4.5 Génération des excitations standards pour le bord de révolution

Nous voyons aussi que, par le choix judicieux de l'incidence, ou par le jeu d'interférences, il est possible d'obtenir localement et commodément des situations où seulement un type d'excitation standard domine. Ainsi, nous voyons que :

– Pour obtenir localement, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type $i_{VA 0}$ nous pouvons par exemple associer une composante $h = k$ et une composante $h = -k$, toutes deux avec la même amplitude c_0 . Ceci se réalise par exemple commodément au laboratoire, sur une fraction

de longueur d'onde le long de Oz, dans un banc triaxial[†] court-circuité de forme appropriée. Cette réalisation est beaucoup plus simple que la création d'une onde cylindrique avec $h = 0$.

– Pour obtenir localement, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type ρ_{L0} nous pouvons par exemple associer une composante $h = k$ et une composante $h = -k$, toutes deux avec des amplitudes c_0 opposées. Ceci se réalise par exemple commodément, sur une fraction de longueur d'onde le long de Oz, dans un banc triaxial en circuit ouvert.

– Obtenir localement une excitation standard de type j_{VO0} tout le long de l'écran généralisé ne pose pas de problème, comme nous l'avons vu. Nous pouvons par exemple créer un champ électromagnétique ne comportant que la composante $h = 0$, avec des distributions d'amplitude nulles sauf b_0 et d_0 liées par (4-4), ce qui se réalise simplement (mais approximativement) si r_E est beaucoup plus petit que la longueur d'onde, en plaçant le câble sur l'axe d'un solénoïde dont chaque spire serait alimentée séparément par une source de courant en phase avec les autres.

– Pour $n \geq 1$, nous pouvons par exemple obtenir localement, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type i_{VAN} , en associant une composante $h = k$ et une composante $h = -k$, toutes deux avec les mêmes amplitudes u_n et v_n liées par (4-5). Ceci peut se réaliser au laboratoire sur une fraction de longueur d'onde le long de Oz, dans un banc comportant $2n$ électrodes court-circuitées à une extrémité, alimentées avec une phase convenable à l'autre extrémité. La forme à donner à ces électrodes sera précisée plus loin.

– Pour $n \geq 1$, nous pouvons par exemple obtenir localement, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type ρ_{Ln} , en associant une composante $h = k$ et une composante $h = -k$, toutes deux avec des amplitudes opposées u_n et v_n liées par (4-5). Ceci peut se réaliser au laboratoire sur une fraction de longueur d'onde le long de Oz, dans le même banc à $2n$ électrodes qu'indiqué précédemment, en circuit ouvert à une extrémité, alimentées avec une phase convenable à l'autre extrémité.

– Pour $n \geq 1$, il faut au moins trois incidences différentes pour obtenir localement, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type $j_{VO n}$. Nous associerons par exemple une composante $h = 0$, dont les distributions d'amplitude a_n , c_n , b_n et d_n sont liées par (4-4) et la relation supplémentaire annulant H_θ , avec une composante $h = k$ et une composante $h = -k$, toutes deux avec des amplitudes opposées u_n et v_n liées par (4-5) et de valeur convenable pour éliminer en $z = 0$ le champ E_r de la composante $h = 0$.

En pratique, les excitations standards ne sont réalisables au voisinage de $z = 0$, et exploitables simplement, que pour un échantillon dont les dimensions transversales sont beaucoup plus petites que la zone pour laquelle l'excitation est localement pure, qui est forcément

[†] Le banc triaxial est un dispositif de mesure classique qui sera discuté en détail au § 7.2.

plus petite que la longueur d'onde (sauf pour j_{VO0}). Pour j_{VO0} aussi, cependant, il est beaucoup plus simple de réaliser l'excitation sur un échantillon pour lequel r_E est beaucoup plus petit que la longueur d'onde.

Pour obtenir, au voisinage de $z = 0$, une excitation standard de type j_{VO_n} pour $n \geq 1$, nous notons que dès que nous nous éloignons de $z = 0$, nous rencontrons forcément les courants qui ont pour mission d'enlever les charges amenées par j_{VO_n} , comme montré sur la figure 2-2 du § 2.3. Si le rayon r_E est petit devant la longueur d'onde, (2-7) et (2-18) montrent que le courant selon \mathbf{e}_z ne dominera le courant selon \mathbf{e}_2 que sur une longueur de l'ordre de r_E/n . Nous pouvons donc nous interroger sur la possibilité réelle de réaliser d'exploiter cette expérience.

Les bancs à $2n$ électrodes évoqués ci-dessus, pouvant être utilisés court-circuités pour obtenir localement une excitation standard de type i_{VA_n} , ou utilisés en circuit ouvert pour obtenir localement une excitation standard de type ρ_{L_n} , doivent être définis plus précisément. Dans les deux cas, ils sont parcourus par deux ondes TEM se propageant en sens inverses, parallèlement à Oz. Ceci implique que dans le cas de l'utilisation en circuit ouvert, le champ électrique dans un plan orthogonal à Oz dérive d'un potentiel. Compte tenu de la dépendance de ces ondes TEM en fonction de r , donnée par (3-63), et en fonction de θ , le potentiel est donné par l'expression (C-29) de l'Annexe C, obtenue par inversion analytique de potentiels du type $(x+iy)^n$. Les électrodes doivent prendre la forme des équipotentielles ainsi déterminées. Pour $n = 0$, le potentiel complexe qui donne la forme des électrodes est ainsi

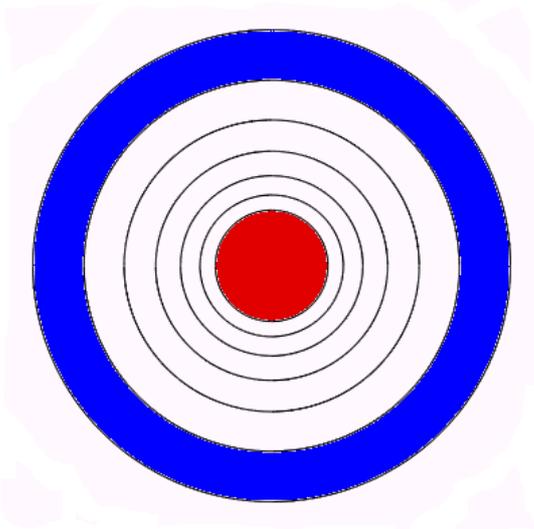
$$\zeta(x+iy) = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{x+iy}{r_E} \quad (4-7)$$

Les électrodes sont d'une part l'écran généralisé et d'autre part un cylindre coaxial constituant un banc triaxial, comme montré sur la figure 4-1. Pour $n \neq 0$, le potentiel complexe qui donne la forme des électrodes est

$$\zeta(x+iy) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \left\{ \left(\frac{r_E}{x+iy} \right)^n - \left(\frac{x-iy}{r_E} \right)^n \right\} \quad (4-8)$$

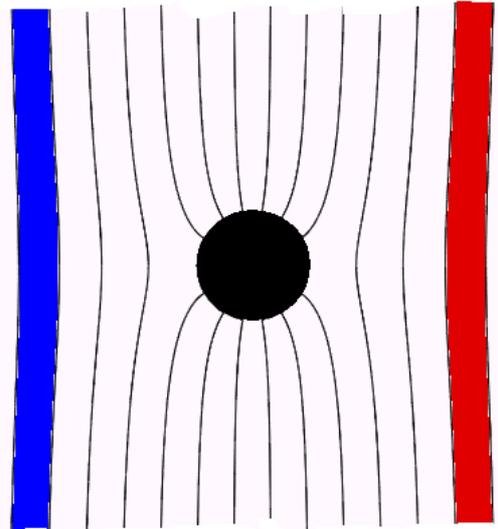
La forme des électrodes est montrée sur la fig. 4-2 pour $n = 1$, sur la fig. 4-3 pour $n = 2$, sur la fig. 4-4 pour $n = 3$, sur la fig. 4-5 pour $n = 4$, sur la fig. 4-6 pour $n = 5$, où les électrodes au même potentiel sont de même couleur (rouge ou bleue).

Les bancs que nous venons de définir apparaissent clairement plus réalisables que les sources abstraites utilisées pour la démonstration du (ii) du théorème 7 du § 2.5.



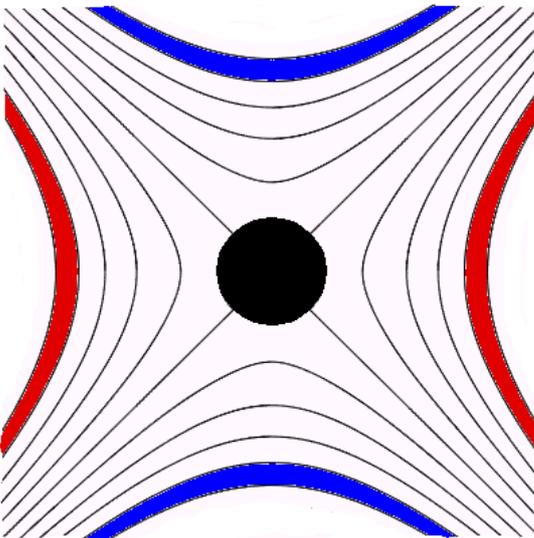
v0

Fig. 4-1: Electrodes pour $n = 0$



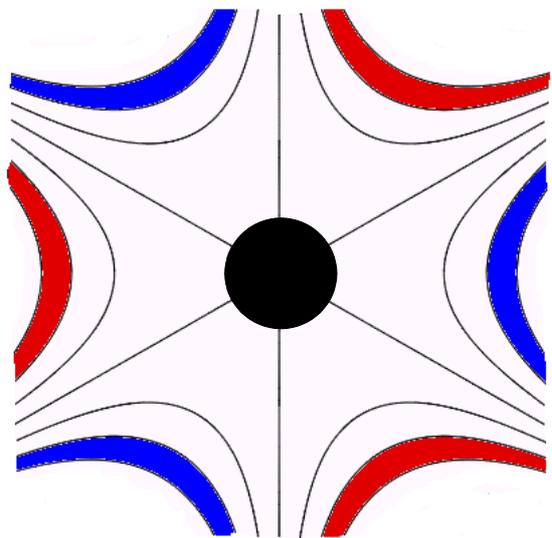
v1

Fig. 4-2: Electrodes pour $n = 1$



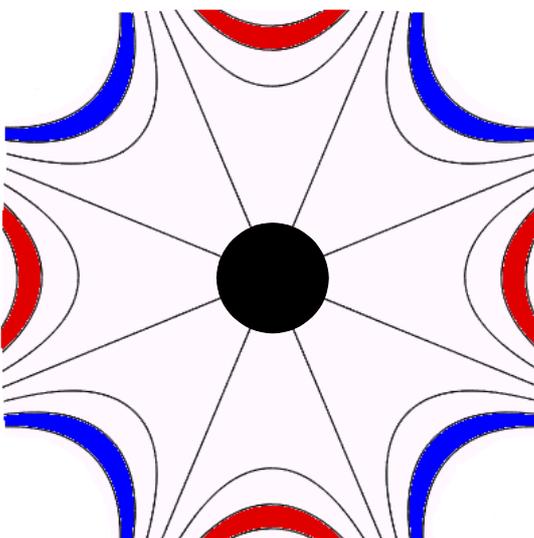
v2

Fig. 4-3: Electrodes pour $n = 2$



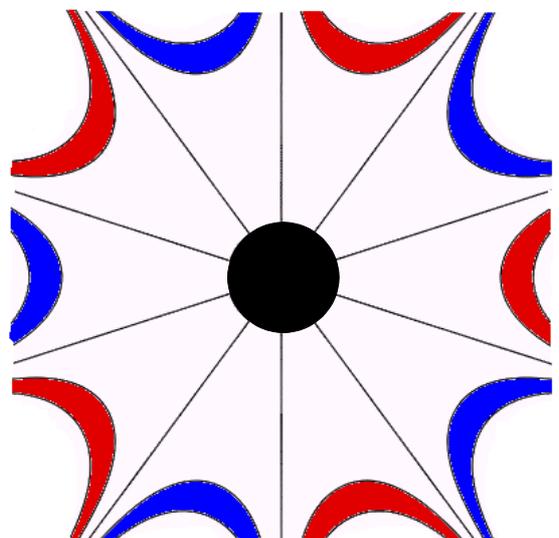
v3

Fig. 4-4: Electrodes pour $n = 3$



v4

Fig. 4-5: Electrodes pour $n = 4$



v5

Fig. 4-6: Electrodes pour $n = 5$

4.6 Excitations standards pour un bord externe autre que de révolution

4.6.1 Bord externe à section droite elliptique

Comme le cas du cylindre elliptique est plus complexe que celui du cylindre de révolution, nous limiterons notre ambition à déterminer des sources pour les excitations standards de type i_{VA0} , de type ρ_{L0} , et de type j_{VO0} , car celles-ci sont évidentes. Ainsi, nous voyons que :

– Une réponse standard de type ρ_{L0} correspond par définition à la répartition naturelle qu'adopteraient les charges à l'équilibre électrostatique, sur le bord externe de l'écran généralisé chargé, si ce bord était conducteur. Cette répartition de charge a été déterminée au § 2.8, où nous avons également établi le potentiel correspondant. La métallisation de l'une d'elles (avec un conducteur idéal), choisie suffisamment proche de l'écran généralisé pour que seul le mode TEM puisse se propager, permet de créer un banc de mesure, comme dans le cas du cylindre de révolution. Utilisé en circuit ouvert à une extrémité, avec un générateur branché à l'autre, ce banc produira donc, pour l'écran généralisé cylindrique à section droite elliptique, une excitation standard de type ρ_{L0} .

– Une réponse standard de type i_{VA0} correspond à la répartition naturelle qu'adopterait le courant superficiel sur l'écran généralisé installé dans le banc ayant servi à produire l'excitation de type ρ_{L0} , court-circuité à l'extrémité opposée de celle où le générateur est branché, si le bord externe était un conducteur idéal. En effet, pour le mode TEM dans un guide sans pertes, les répartitions transversales des courants et des charges sont identiques [36, p. 248], à une constante multiplicative près. Utilisé de cette façon, ce banc produira donc, pour l'écran généralisé cylindrique à section droite elliptique, une excitation standard de type i_{VA0} .

– Une excitation standard de type j_{VO0} peut toujours être produite, aux fréquences pour lesquelles la section droite de l'écran est petite devant la longueur d'onde, en plaçant l'écran sur l'axe d'un solénoïde long dont les différentes spires seraient alimentées par des sources de courant en phase, comme envisagé pour le bord cylindrique de révolution.

Nous notons que pour produire commodément ces trois types d'excitation isolément par les méthodes envisagées, il faut que l'échantillon soit petit devant la longueur d'onde transversalement et longitudinalement. Nous notons aussi que, comme le montre la figure 2-3 du § 2.8, suffisamment loin de l'écran généralisé, les équipotentielles deviennent presque des cercles, si bien que les trois excitations standard envisagées peuvent (presque) être produites comme pour le bord externe de révolution.

4.6.2 Bord externe à section droite rectangulaire

Comme dans l'étude du cylindre elliptique, nous pouvons déterminer sans travail des sources pour les excitations de types i_{VA0} , de type ρ_{L0} , et de type j_{VO0} . La définition en est exactement identique à celle adoptée pour le cylindre elliptique, sauf pour la forme des équipotentielles, qui seront ici celles déterminées au § 2.9.

4.7 Choix de la définition du bord externe pour un écran généralisé

La caractérisation des performances d'un écran généralisé doit reposer sur une classification des excitations possibles. Pour chaque classe d'excitation, un "paramètre d'écrantage" est alors défini. Selon l'approche que nous avons adoptée, la classification repose sur une décomposition en excitations standards en un point z donné. Par définition, chaque excitation standard correspond à une configuration différente des champs électrique et magnétique incidents sur l'écran pour cette valeur de z , sans que la définition de l'excitation standard indique comment la répartition évolue le long de l'axe Oz . Dans le cas du cylindre de révolution par exemple, si nous disons que nous sommes en présence d'une excitation standard de type i_{VA0} , nous ne savons pas à quelle valeur de h elle correspond. La classification selon les excitations standards est donc adaptée à la description locale, c'est-à-dire autour d'une valeur de z , des champs incidents sur l'écran.

Nous devons nous demander si cette classification est pertinente. Elle le sera seulement si, pour toutes les configurations de champs dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, qui sont des excitations standards au même point z , d'un même type, le comportement de l'écran généralisé est identique, ou à tout le moins similaire. Une autre condition pour la pertinence de la classification est son exhaustivité. Sur ce dernier point, nous pouvons constater que, pour un bord externe de révolution, nous avons, au § 4.5, développé les champs électrique et magnétique dans le volume extérieur à l'écran généralisé en une combinaison linéaire d'excitations standards, ce qui établit l'exhaustivité de la classification.

Si l'écran généralisé que nous désirons caractériser a un bord externe avec des propriétés électromagnétiques suffisamment voisines de celles d'une métallisation idéale, toute excitation standard produira une réponse tangentielle localement pure en z , de même type que l'excitation standard. Donc toute excitation standard d'un type donné produira les mêmes distributions de courant et de charge sur l'écran en z , donc le même comportement de l'écran en z . Notre

classification est donc pertinente pour de tels écrans généralisés.

Cependant, nous ne sommes pas en mesure de déterminer les différences dans les distributions de courant et de charge induites par des excitations standards de même type en z , lorsque l'écran généralisé que nous désirons caractériser a un bord externe avec des propriétés électromagnétiques très différentes d'une métallisation idéale. C'est la raison pour laquelle nous accepterons un postulat pour appliquer notre classification à des écrans généralisés différant de l'écran généralisé ayant une métallisation idéale sur son bord externe.

Postulat. Deux excitations quelconques, qui sont des excitations standards de même type au point z , vont produire le même comportement de l'écran généralisé en ce point.

Ce postulat peut être vu comme une approximation *ex-ante* considérée satisfaisante sans examen plus approfondi. Elle sera par exemple utile quand nous voudrions caractériser un écran généralisé ayant une structure qui ne permet pas aux courants de circuler comme dans un milieu homogène, ou bien lorsque les parties conductrices de l'écran généralisé ont une forme qui diffère franchement de celle du bord externe.

Nous devons maintenant considérer comment la caractérisation de l'écran généralisé peut être utilisée théoriquement et expérimentalement. Expérimentalement, pour la mesure des paramètres d'écrantage évoqués plus haut, un écran généralisé sous test sera inséré dans des dispositifs d'essai, par exemple basés sur les considérations du § 4.5, capables de produire des excitations standards de différents types. Pour des raisons économiques, un nombre limité de tels dispositifs d'essai sera employé, et ils seront déduits de formes simples de bord externe de l'écran généralisé. Sur le plan théorique, la mise en oeuvre de la caractérisation de l'écran généralisé nécessitera typiquement, premièrement le calcul des champs incidents, deuxièmement, en chaque point z , un développement en excitations standards comportant autant de termes que nécessaire pour obtenir la précision souhaitée, et troisièmement le calcul des amplitudes couplées à travers l'écran généralisé en utilisant les paramètres d'écrantage pour chaque type d'excitation standard. Cependant, il est clair que la méthode employée au § 4.5 pour développer les champs électrique et magnétique dans le volume extérieur à l'écran généralisé en une combinaison linéaire d'excitations standards, ne pourrait se généraliser qu'à des formes très simples, et au prix d'efforts considérables.

Par bonheur, la flexibilité du concept d'écran généralisé, et le postulat énoncé plus haut vont nous tirer d'affaire. Nous pouvons en effet combiner un écran généralisé cylindrique de

section droite quelconque avec une zone d'exclusion supplémentaire (voir § 2.1), pour nous ramener à un bord externe de forme plus simple. Par exemple, si nous avons à traiter le problème de la caractérisation d'un câble plat écranté, représenté sur la fig. 4-7 au a), nous ne chercherons jamais à traiter le problème de la définition des excitations standards pour un écran généralisé représentant exactement la forme du câble. Par contre, nous pourrions envisager de considérer des écrans généralisés dont le bord externe aurait une forme plus simple, contenant l'écran réel. Par exemple, nous pourrions opter pour un écran généralisé de bord externe rectangulaire, comme représenté sur la fig. 4-7 au b), ou pour un écran généralisé de bord externe — plus simple à traiter — elliptique, comme représenté sur la fig. 4-7 au c), ou enfin pour un écran généralisé de bord externe — de la plus grande simplicité — circulaire, comme représenté sur la fig. 4-7 au d). Sur les différents dessins de la figure 7, les parties hachurées représentent les zones d'exclusion supplémentaires, les parties en violet tressé représentent l'écran réel du câble, les disques marrons représentent les conducteurs internes.

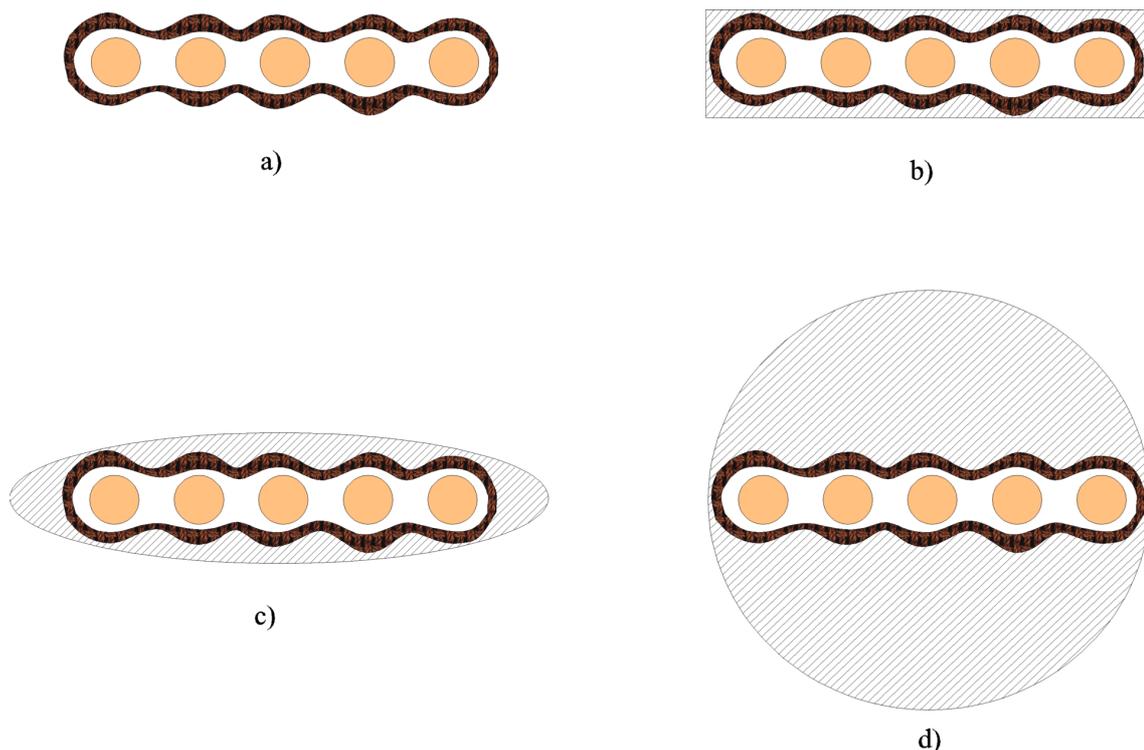


Fig. 4-7 :section droite d'un câble multiconducteur en nappe, a) avec l'écran généralisé apparaissant comme une zone sombre, b) avec un écran généralisé à section droite rectangulaire, c) avec un écran généralisé à section droite elliptique, d) avec un écran généralisé à section droite circulaire.

La seule chose que nous perdons lorsque nous simplifions de la sorte la forme du bord externe de l'écran généralisé servant à définir les excitations standards, c'est la faculté de traiter rigoureusement un problème comportant des conducteurs dans la zone d'exclusion, ce qui est

particulièrement dommageable si un conducteur très proche de l'écran joue un rôle important dans un problème réel concernant cet écran.

Ceci étant observé, nous nous limiterons dans la suite à traiter le cas d'un écran généralisé dont le bord externe est un cylindre de révolution. En utilisant l'idée de la simplification de la forme du bord externe, ce qui suivra pourra néanmoins s'appliquer à des écrans généralisés de formes différentes.

4.8 Amplitude naturelle d'une excitation standard

Pour caractériser les performances électromagnétiques de l'écran généralisé, par exemple à une pulsation ω et en un point z , il va falloir rapporter des grandeurs physiques mesurées dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé (cf. § 2.1), à une quantité caractéristique des distributions de champ correspondant à un type donné d'excitation standard, au voisinage de z . L'objet de ce paragraphe est de définir cette quantité, que nous appellerons *amplitude* de l'excitation standard.

Pour définir l'amplitude applicable à un type d'excitation standard donné, nous pourrions penser à utiliser l'amplitude du champ électrique ou du champ magnétique d'une excitation standard de ce type, en un point de référence dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Il semblerait naturel d'utiliser plutôt une amplitude de champ magnétique pour les excitations standards de type $i_{VA n}$ ou $j_{VO n}$, et plutôt une amplitude de champ électrique pour les excitations standards de type $\rho_{L n}$. Cette approche simple soulève cependant deux remarques :

- a) il est clair qu'en utilisant une valeur du champ en un point arbitraire dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, la position de ce point va jouer un rôle indésirable ;
- b) le diamètre plus ou moins arbitraire de l'écran généralisé jouera aussi un rôle, ce qui n'est pas nécessaire.

Nous allons donc définir les amplitudes des excitations standards, en évitant ces inconvénients. La définition suivante fait référence à la configuration de champs électromagnétiques produite par toutes les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, traitée comme un champ appliqué. Cet aspect sera discuté séparément, au § 4.9.

Définition : Amplitude naturelle. Pour un écran généralisé cylindrique de révolution donné, soumis à une configuration *donnée* de champs électromagnétiques produite par toutes les sources

dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, si nous appelons $i_{VA n}$, $\rho_{L n}$ et $j_{VO n}$ les réponses standards qui apparaîtraient au voisinage du point z si le bord externe C_E de l'écran y était parfaitement conducteur, nous décidons que, au point z :

- i) pour l'excitation standard de type $i_{VA 0}$, l'amplitude naturelle est $i_{VA 0}$;
- ii) pour l'excitation standard de type $\rho_{L 0}$, l'amplitude naturelle est $\rho_{L 0}$;
- iii) pour l'excitation standard de type $j_{VO 0}$, l'amplitude naturelle est $-j_{VO 0}/(2\pi)$;
- iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour l'excitation standard de type $i_{VA n}$, l'amplitude naturelle est $i_{VA n}/(4\pi r_E^n)$;
- v) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour l'excitation standard de type $\rho_{L n}$ l'amplitude naturelle est $\rho_{L n}/(4\pi r_E^n \varepsilon_0)$;
- vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour l'excitation standard de type $j_{VO n}$ l'amplitude naturelle est $-j_{VO n}/(4\pi r_E^n)$.

Appelons E_{nr} , $E_{n\theta}$ et E_{nz} les amplitudes hypercomplexes du champ électrique *total* et H_{nr} , $H_{n\theta}$ et H_{nz} les amplitudes hypercomplexes du champ magnétique *total*, qui apparaîtraient si le bord externe C_E de l'écran était parfaitement conducteur, intégrées sur la variable h . Selon (3-55) à (3-60), nous avons, sur C_E , c'est-à-dire pour $r = r_E$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{nr} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \left\{ -j h \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - j \eta_0 \frac{k}{r_E} n (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \mathbf{i} \right\} dh \\ E_{n\theta} = 0 \\ E_{nz} = 0 \\ H_{nr} = 0 \\ H_{n\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} \left\{ \frac{-jk}{\eta_0} \left(a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + c_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right) - j \frac{h}{r_E} n (b_n \phi_n + d_n \psi_n) \mathbf{i} \right\} dh \\ H_{nz} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} (k^2 - h^2) (b_n \phi_n + d_n \psi_n) dh \end{array} \right. \quad (4-9)$$

En utilisant (4-6), nous obtenons les expressions des amplitudes naturelles en fonction de ces amplitudes hypercomplexes de champ sur C_E , c'est-à-dire pour $r = r_E$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{VA 0} = 2\pi r_E H_{0\theta} \\ \rho_{L 0} = 2\pi r_E \varepsilon_0 E_{0r} \\ H_{0z} = -\frac{1}{2\pi} j_{VO 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2r_E^{n-1}} H_{n\theta} = \frac{1}{4\pi r_E^n} i_{VA n} \\ \frac{1}{2r_E^{n-1}} E_{nr} = \frac{1}{4\pi r_E^n \varepsilon_0} \rho_{L n} \\ \frac{1}{2r_E^n} H_{nz} = -\frac{1}{4\pi r_E^n} j_{VO n} \end{array} \right. \quad (4-10)$$

Pour préciser un peu cette définition, considérons à présent un écran généralisé réel, inséré dans un dispositif d'essai pour l'y soumettre à une excitation standard de type donné, au voisinage de $z = 0$. Nous supposons que les courants et les charges dans le dispositif d'essai ne

changent pas lorsque, par la pensée, nous substituons à l'écran généralisé réel un écran généralisé de révolution dont le bord externe de rayon r_E est parfaitement conducteur. Pour compléter la discussion du § 4.5, nous allons passer cinq cas en revue.

Cas 1. Pour une excitation standard de type i_{VA0} au point de $z = 0$, nous allons utiliser l'association d'une composante $h = k$ et d'une composante $h = -k$, toutes deux avec la même amplitude c_0 . Dans ce cas, l'examen de (3-63) et (4-1) montre que H_θ est en $1/r$, donc que

$$i_{VA0} = 2\pi r H_\theta \quad (4-11)$$

pour $r \geq r_E$.

Cas 2. Pour une excitation standard de type ρ_{L0} au point $z = 0$, nous allons utiliser l'association d'une composante $h = k$ et d'une composante $h = -k$, toutes deux avec des amplitudes c_0 opposées. Dans ce cas l'examen de (3-63) et (4-1) montre que E_r est en $1/r$, donc que :

$$\rho_{L0} = 2\pi \epsilon_0 r E_r \quad (4-12)$$

pour $r \geq r_E$.

Cas 3. Pour une excitation standard de type j_{VO0} au point $z = 0$, nous allons utiliser une composante $h = 0$, avec des distributions d'amplitude nulle sauf b_0 et d_0 liées par (4-4). Dans cette configuration, une nappe de courant solénoïdale infinie est créée. Nous voyons que b_0 correspond à une onde incidente, et d_0 à une onde réfléchie, et que b_0 et d_0 sont des distributions de Dirac. Notons B_0 la surface

$$B_0 = \int_{-k}^k b_0(h) dh \quad (4-13)$$

de la distribution b_0 , qui s'exprime en Am. A partir de (4-1) et (4-4), et en utilisant 9.1.27 de [9], nous pouvons calculer la valeur de la composante axiale H_z du champ magnétique pour $r \geq r_E$, qui s'exprime avec des fonctions de Hankel :

$$H_z = 2k^2 B_0 \frac{H_0^{(1)}(kr) H_1^{(2)}(kr_E) - H_0^{(2)}(kr) H_1^{(1)}(kr_E)}{2 H_1^{(2)}(kr_E)} \quad (4-14)$$

En utilisant 9.1.17 de [9], il vient :

$$H_z = 2k^2 B_0 \frac{2j}{\pi kr H_1^{(2)}(kr)} \quad (4-15)$$

Selon (4-10), cette expression, utilisée en $r = r_E$, nous donne l'amplitude naturelle. Nous notons que, si l'écran généralisé a un rayon petit devant la longueur d'onde, (4-15) se transforme par le développement limité 9.1.9 de [9] en :

$$H_z = 2k^2 B_0 \frac{\mathbf{j}(Y_0(kr)J_1(kr_E) - J_0(kr)Y_1(kr_E))}{J_1(kr_E) - \mathbf{j}Y_1(kr_E)} \approx 2k^2 B_0 \quad (4-16)$$

valable pour $1 \gg kr \geq kr_E$. Nous observons ici que, lorsque et là où cette condition est respectée, l'écran généralisé idéalement métallisé est entouré par un champ magnétique axial uniforme. Parce qu'une nappe infinie de courant solénoïdal sur un cylindre de révolution ne rayonne pas de champ magnétique (le champ est emprisonné dans la nappe), le champ donné par (4-16) est aussi égal au champ appliqué par les sources extérieures du dispositif d'essai.

Cas 4. Pour une excitation standard de type $i_{VA n}$ au point $z = 0$, avec $n \geq 1$, nous allons utiliser l'association d'une composante $h = k$ et d'une composante $h = -k$, toutes deux avec les mêmes amplitudes u_n et v_n liées par (4-5). Nous notons que, dans (4-3), u_n est le coefficient d'une fonction ϕ_n en r^n , causée par les sources extérieures, tandis que v_n est le coefficient d'une fonction ψ_n en r^{-n} , causée par les courants et charges sur l'écran généralisé métallisé. En utilisant (4-3), nous établissons que la superposition en $z = 0$ des fonctions ϕ_n de chaque composante conduit à un champ électrique appliqué \mathbf{E}^{appl} et à un champ magnétique appliqué \mathbf{H}^{appl} valant :

$$\begin{cases} E_r^{appl} = 0 \\ E_\theta^{appl} = 0 \\ E_z^{appl} = 0 \\ H_r^{appl} = 2\mathbf{j} \frac{nk r^{n-1}}{\eta_0 r_E^n} u_n \mathbf{i} \\ H_\theta^{appl} = -2\mathbf{j} \frac{nk r^{n-1}}{\eta_0 r_E^n} u_n \\ H_z^{appl} = 0 \end{cases} \quad (4-17)$$

en $z = 0$, pour $r \geq r_E$. La quantité

$$\frac{H_\theta^{appl}}{r^{n-1}} = -2\mathbf{j} \frac{nk}{\eta_0 r_E^n} u_n \quad (4-18)$$

est donc indépendante de r . Dans cette configuration, (4-3) et (4-5) montrent que, sur le bord externe métallisé, le champ magnétique total vaut $H_\theta = 2H_\theta^{appl}$. Selon (4-10), l'amplitude naturelle de l'excitation standard vaut donc :

$$\frac{H_\theta^{appl}}{r^{n-1}} = \frac{i_{VA n}}{4\pi r_E^n} \quad (4-19)$$

Dans le cas particulier $n = 1$, nous notons que (4-19) montre que le champ magnétique appliqué est uniforme, orthogonal à l'axe Oz, et que l'amplitude naturelle de l'excitation standard est

simplement l'amplitude hypercomplexe du champ magnétique appliqué.

Cas 5. Pour une excitation standard de type ρ_{Ln} au point $z = 0$, avec $n \geq 1$, nous allons utiliser l'association d'une composante $h = k$ et d'une composante $h = -k$, toutes deux avec des amplitudes opposées u_n et v_n liées par (4-5). Comme précédemment, u_n est le coefficient d'une fonction ϕ_n en r^n , causée par les sources extérieures, tandis que v_n est le coefficient d'une fonction ψ_n en r^{-n} , causée par les courants et charges sur l'écran généralisé métallisé. En utilisant (4-3), nous établissons que la superposition en $z = 0$ des fonctions ϕ_n de chaque composante conduit à un champ électrique appliqué \mathbf{E}^{appl} et à un champ magnétique appliqué \mathbf{H}^{appl} valant :

$$\begin{cases} E_r^{appl} = \mp 2 \mathbf{j} \frac{nk r^{n-1}}{r_E^n} u_n \\ E_\theta^{appl} = \mp 2 \mathbf{j} \frac{nk r^{n-1}}{r_E^n} u_n \mathbf{i} \\ E_z^{appl} = 0 \\ H_r^{appl} = 0 \\ H_\theta^{appl} = 0 \\ H_z^{appl} = 0 \end{cases} \quad (4-20)$$

en $z = 0$, pour $r \geq r_E$. La quantité

$$\frac{E_r^{appl}}{r^{n-1}} = \mp 2 \mathbf{j} \frac{nk}{r_E^n} u_n \quad (4-21)$$

est donc indépendante de r . Dans cette configuration, (4-3) et (4-5) montrent que, pour le champ électrique total à la surface de l'écran généralisé métallisé, $E_r = 2E_r^{appl}$. En utilisant (4-10), nous obtenons donc que l'amplitude naturelle de l'excitation standard vaut

$$\frac{E_r^{appl}}{r^{n-1}} = \frac{\rho_{Ln}}{4\pi \epsilon_0 r_E^n} \quad (4-22)$$

Dans le cas particulier $n = 1$, nous notons que (4-22) montre que le champ électrique appliqué est uniforme, orthogonal à l'axe Oz, et que l'amplitude naturelle de l'excitation standard est simplement l'amplitude hypercomplexe du champ électrique appliqué.

4.9 Discussion des sources et des champs appliqués

Nous avons, au § 4.2 défini les excitations standards comme des configurations de champs électromagnétiques produites par toutes les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran

généralisé. Dans cet énoncé, l'acception du terme *source* est celle utilisée en électromagnétisme [3, § 1] : les sources de champs sont les courants électriques et les charges électriques dont les variations sont liées aux dits courants. Les sources en question sont donc tous les courants électriques et charges électriques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, y compris ceux correspondant à la polarisation et à l'aimantation de la matière, *en présence de l'écran généralisé*. Les champs produits par ces sources sont donc les champs appliqués sur l'écran généralisé.

Les sources fournissant la puissance électromagnétique ne sont donc que des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé parmi d'autres. Les autres sources sont par exemple des conducteurs parcourus par des courants induits et des diélectriques se polarisant, du fait de l'influence des sources fournissant la puissance électromagnétique.

Les courants et charges constituant *toutes les sources* sont ensuite pris comme des données du problème électromagnétique, et ne changent donc pas lorsque, selon les termes de la définition des excitations standards, l'écran généralisé réel est remplacé par un autre écran généralisé dont le bord externe est parfaitement conducteur. Par conséquent les champs appliqués sont aussi invariants.

Dans le cas d'un bord de révolution, la détermination des champs appliqués semble réglée, puisque, selon le § 3.8, il suffirait de ne prendre en compte que les termes en ϕ_n , dont les facteurs sont les coefficients a_n et b_n de (3-66) à (3-71) pour les amplitudes hypercomplexes, et de (4-1) pour les amplitudes complexes. Un problème apparaît toutefois : comme indiqué au § 4.3, pour $h = \pm k$, a_0 et b_0 ne correspondent à aucun champ ! Plus généralement, il nous faut discuter la discontinuité en $h = \pm k$, des expressions (3-62) et (3-63), qui n'est pas anodine, car lorsque h tend vers k avec $|h| \leq k$, les deux fonctions de (3-62) s'approchent de ψ_n de (3-33).

L'explication physique de cette singularité est fort simple. Pour $h = \pm k$ les ondes se propagent parallèlement à l'écran généralisé, supposé infini dans la mise en équation du § 4.3. Dans le cas idéal d'un bord parfaitement conducteur qui nous occupe, ces ondes TEM se propagent sans rayonnement (elles sont parfaitement guidées) et sans dissipation. Pour exister, elles n'ont donc pas besoin d'apport de puissance de la part d'une source. Pour $n = 0$, point n'est même besoin d'électrode extérieure pour donner une forme convenable au champ, comme indiqué par la condition aux limites (4-5). En effet la comparaison de (3-63) avec le résultat d'électrostatique donné par (C-29) de l'annexe C montre que, pour $n \geq 1$ les ψ_n sont la réponse d'un cylindre conducteur, en présence d'une excitation extérieure décrite par les ϕ_n , mais que ψ_0

est due à des charges (et des courants) présents sur le conducteur, sans cause externe.

Par contre, dès que nous considérons un bord externe de conductivité finie, les ondes TEM ne peuvent pas exister [36, pp. 247-253] [3, § 9.15 et § 9.16]. Les ondes quasi-TEM que nous pouvons alors utiliser sont en réalité des paquets d'onde avec h voisin mais différent de k . Par conséquent, nous pouvons conclure que le fait que la configuration de champs électromagnétiques produite par toutes les sources dans le volume à l'extérieur d'un écran généralisé, cause d'une excitation standard d'indice $n = 0$ en un point z , ne puisse pas contenir de terme en $h = \pm k$, n'est jamais gênante, car :

- si nous considérons un écran généralisé cylindrique *réel* donné, de conductivité finie, il n'y a pas de solution permise en $h = \pm k$ et $n = 0$,
- si nous considérons un bord parfaitement conducteur, la solution $h = \pm k$ et $n = 0$ est permise et ne nécessite pas de source extérieure.

Le paradoxe $h = \pm k, n = 0$ est ainsi expliqué. Au demeurant, la définition des amplitudes naturelles masque ce problème, ce qui est fort légitime, puisqu'il n'existe pas dans la pratique.

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons en premier lieu défini les excitations standard de manière générale. Comme nous n'avons été capables de développer en excitations standards une configuration de champs électromagnétiques quelconque, que dans le cas où le bord externe est un cylindre de révolution, nous avons choisi de privilégier cette forme, en mettant à profit la souplesse du concept d'écran généralisé, et en introduisant un postulat *ad hoc*, au § 4.7.

Par la suite, nous avons su définir, au § 4.8, l'amplitude naturelle de chacune des excitations standards, sans aucune référence à un point arbitraire où les valeurs des champs seraient mesurées. Nous avons au contraire considéré que les amplitudes naturelles des excitations standards sont définies en introduisant par la pensée un écran généralisé cylindrique de révolution, parfaitement conducteur, à la place de l'écran généralisé réel.

Les définitions des amplitudes naturelles ne contiennent aucune hypothèse sur les dimensions transversales de l'écran généralisé par rapport à la longueur d'onde. Cependant, il est vraisemblable que le postulat du § 4.7 ne corresponde à la réalité que dans le cas de longueurs d'onde bien plus grandes que les dimensions transversales de l'écran généralisé. En effet, le

fonctionnement local de l'écran généralisé est dans ce cas quasi-statique, et donc indépendant de l'angle d'incidence, donc du paramètre h . Il est alors aisé d'admettre que "deux excitations quelconques, qui sont des excitations standards de même type au point z , vont produire le même comportement de l'écran généralisé en ce point".

Rappelons que dans le cas particulier où l'écran généralisé a des dimensions transversales très petites devant la longueur d'onde, un vocabulaire a déjà été défini au chapitre 1, pour les configurations de champs correspondant aux cinq principaux types de couplage. Les relations entre ces principaux types de couplage, et les types d'excitation sont claires :

- une excitation standard de type i_{VA0} correspond à un couplage de type 1,
- une excitation standard de type ρ_{L0} correspond à un couplage de type 2,
- Une excitation standard de type j_{VO0} correspond à un couplage de type 3,
- Une excitation standard de type ρ_{L1} correspond à un couplage de type 4,
- Une excitation standard de type i_{VA1} correspond à un couplage de type 5.

Nous notons que les amplitudes naturelles définies pour les excitations standards correspondent, pour le type 1 au courant de mode commun apparaissant dans (1-4), et pour le type 2 à la densité de charge intervenant dans (1-5). Par contre, pour les types 3, 4 et 5 les définitions des amplitudes naturelles sont différentes et plus générales, puisqu'applicables à des configurations de champ quelconques, alors que les définitions du § 1.4 faisaient appel à des champs appliqués uniformes. Dans les cas particuliers où les champs appliqués sont homogènes, nous pouvons raisonner sur des valeurs de h quelconques permettant ces champs homogènes, car nous traitons de dimensions transversales très petites devant la longueur d'onde. En utilisant les résultats du § 4.8 concernant les champs dans un dispositif d'essai (cas 3, 4 et 5), nous voyons qu'il y a bien, dans ces cas particuliers, correspondance entre les amplitudes naturelles et les paramètres utilisés dans (1-6), (1-7) et (1-8).

Nous voyons aussi pourquoi l'adjectif "principaux" a été utilisé pour qualifier ces cinq types de couplage : les excitations standards correspondantes permettent de décrire localement les configurations de champ les plus simples, car elles constituent les premiers termes d'un développement.

Notons enfin que, bien que ce chapitre soit proche de l'exposé de [58], il présente également d'importantes différences, notamment dans la définition des amplitudes naturelles.

Chapitre 5 : Caractérisation des écrans cylindriques

5.1 Introduction

Ce chapitre a été rédigé de façon à pouvoir être compris sans la lecture préalable des chapitres 2 à 4. Nous allons donc en résumer les principaux résultats utiles pour aborder la caractérisation des écrans généralisés cylindriques et des câbles écrantés, pour l'action des champs extérieurs et pour l'émission de champs, dans les paragraphes suivants. Les problèmes traités comportent trois zones, le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, l'écran généralisé et le volume à l'intérieur de l'écran généralisé. Les deux premières zones sont séparées par le bord interne C_i , et les deux dernières par le bord externe C_e . Dans un problème d'action des champs extérieurs, les sources fournissant la puissance électromagnétique sont dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Dans un problème d'émission de champs, les sources fournissant la puissance électromagnétique sont dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé.

Nous traitons d'écran généralisé cylindrique, le terme *généralisé*, introduit au § 2.1, nous permettant de prendre en compte la complexité des écrans réels, qui peuvent comporter des structures quelconques de matériaux conducteurs (par exemple, les tresses), de matériaux diélectriques ou semiconducteurs, etc, y compris des ouvertures. De plus, la caractérisation d'un écran généralisé donné peut être transformé arbitrairement en celle d'un écran généralisé plus vaste, contenant le premier comme indiqué au en § 4.7. Dans ce chapitre et les suivants, nous nous ramènerons toujours à un écran généralisé de révolution de rayon r_e , le cas échéant.

Pour caractériser l'effet, sur l'écran généralisé, de sources de champs électromagnétiques situées dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, nous avons dû prendre en compte le fait, constaté au chapitre 1, que différentes configurations de champs électromagnétiques ont des effets différents sur l'écran généralisé. Nous avons donc créé une classification de ces configurations. Pour être exploitable, l'ensemble des classes de la classification doit être dénombrable, de telle sorte qu'une approximation satisfaisante pour un problème donné repose sur un nombre fini de classes. Comme des configurations de champ électromagnétique périodiques par rapport à l'azimut ont évidemment un effet local dépendant de leur période, nous avons choisi l'entier naturel n , déterminant la période $2\pi/n$, comme principal paramètre de notre classification.

Nous avons ainsi défini, dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, des excitations standards de type $i_{VA n}$, de type $\rho_{L n}$ et de type $j_{VO n}$, comme des configurations de champs électromagnétiques produites par toutes les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, champs qui produiraient, si le bord externe C_E de l'écran était parfaitement conducteur, des champs totaux ayant les caractéristiques suivantes sur ce bord externe :

- une excitation standard de type $i_{VA n}$ correspond à un champ magnétique azimutal de période $2\pi/n$ par rapport à l'azimut ;
- une excitation standard de type $\rho_{L n}$ correspond à un champ électrique radial de période $2\pi/n$ par rapport à l'azimut ;
- une excitation standard de type $j_{VO n}$ correspond à un champ magnétique axial de période $2\pi/n$ par rapport à l'azimut.

Ces excitations standards sont caractérisées par une amplitude naturelle, qui est un quaternion, ce qui constitue la manière la plus simple de prendre en compte les quatre paramètres réels nécessaires, cette question ayant été discutée en détail au chapitre 3. Pour utiliser les amplitudes hypercomplexes, les notions sur les quaternions exposées au § A.1 sont suffisantes. De façon analogue à ce qui se passe avec les amplitudes complexes, lorsque nous effectuons des calculs avec des amplitudes hypercomplexes, les quantités correspondantes dans le domaine temporel et en fonction de l'azimut s'obtiennent en prenant la partie réelle de l'amplitude hypercomplexe, préalablement multipliée à gauche par $e^{j\omega}$, et à droite par $e^{i n\theta}$. Pour $n = 0$, les amplitudes hypercomplexes peuvent d'ailleurs être traitées comme des amplitudes complexes, puisque l'azimut n'intervient pas.

Lorsque la longueur d'onde des champs incidents est grande devant les dimensions transversales de l'écran, les cinq principaux types de couplage définis au chapitre 1 correspondent à des excitations standards d'indice 0 ou 1, de la façon suivante.

- Une excitation standard de type $i_{VA 0}$ correspond à un couplage de type 1, l'amplitude naturelle de l'excitation standard étant l'amplitude complexe du courant axial $i_{VA 0}$, en accord avec (1-4).
- Une excitation standard de type $\rho_{L 0}$ correspond à un couplage de type 2, l'amplitude naturelle de l'excitation standard étant l'amplitude complexe de la densité linéique de charge $\rho_{L 0}$, en accord avec (1-5).
- Une excitation standard de type $j_{VO 0}$ correspond à un couplage de type 3. L'amplitude naturelle

de l'excitation standard est $-j_{VO0}/(2\pi)$ où j_{VO0} est l'amplitude complexe de la composante d'indice $n = 0$ de la densité linéique de courant azimutal. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ magnétique axial et uniforme, l'amplitude naturelle est égale à l'amplitude complexe du champ magnétique appliqué, en accord avec (1-6).

■ Une excitation standard de type ρ_{L1} correspond à un couplage de type 4. L'amplitude naturelle de l'excitation standard est $\rho_{L1}/(4\pi r_E \epsilon_0)$ où ρ_{L1} est l'amplitude hypercomplexe de la composante d'indice $n = 1$ de la densité de charge linéique locale. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ électrique uniforme dans un plan orthogonal à l'axe du câble, l'amplitude naturelle est l'amplitude hypercomplexe de ce champ électrique appliqué, en accord avec (1-7).

■ Une excitation standard de type i_{VA1} correspond à un couplage de type 5. L'amplitude naturelle de l'excitation standard est $i_{VA1}/(4\pi r_E)$ où i_{VA1} est l'amplitude hypercomplexe de la composante d'indice $n = 1$ du courant local axial. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ magnétique uniforme dans un plan orthogonal à l'axe du câble, l'amplitude naturelle est l'amplitude hypercomplexe de ce champ magnétique appliqué, en accord avec (1-8).

Après cette révision des résultats des chapitres 2 à 4, nous sommes en mesure d'aborder la caractérisation des écrans généralisés et des câbles écrantés. Nous traiterons d'abord le problème de l'écran en lui-même, du § 5.2 au § 5.4, pour passer ensuite à la question, plus simple, de la caractérisation des câbles.

5.2 Action des champs extérieurs à l'intérieur

Si nous souhaitons caractériser les propriétés d'écrantage d'un écran généralisé cylindrique creux en un point z , nous devons comparer un ensemble de quantités physiques, vues comme des effets, mesurées dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, à l'amplitude naturelle d'une excitation standard de type donné, vue comme une cause. Dans ce volume à l'intérieur de l'écran généralisé, nous savons qu'il sera souvent possible de calculer le champ électrique et le champ magnétique comme si le volume était isolé du reste de l'univers, pourvu que les champs produits par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, par exemple ceux de nos excitations standards, soient pris en compte avec des sources équivalentes sur le bord du volume à l'intérieur de l'écran généralisé, c'est-à-dire le bord interne de l'écran généralisé. Il est important d'observer que ces *sources internes équivalentes* sont localisées sur les parties de ce bord interne où l'écran généralisé est excité et fuit, tandis que les champs électriques et

magnétiques qu'elles génèrent peuvent exister n'importe où dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, même dans le cas d'une excitation limitée à une petite partie de l'écran généralisé. De plus, les sources internes équivalentes pourront être définies de façon à être largement indépendantes de ce qui peut être placé dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé (comme nous le montrerons à la fin de ce paragraphe), alors que ces champs électriques et magnétiques ne le sont pas. Il est donc approprié d'utiliser les sources internes équivalentes, et non les champs qu'elles génèrent, pour la définition des dites quantités physiques.

Précisons à présent comment nous pouvons définir les termes sources. Par application du principe d'équivalence [7, § 3.5], nous pouvons rechercher des termes sources sur le bord interne, qui produisent dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé les mêmes champs que ceux qu'y produisent, à travers l'écran généralisé, les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Ces termes sources peuvent être définis de façon à produire des champs nuls ailleurs, c'est-à-dire dans l'écran généralisé et dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Si \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal au bord interne, dirigé vers le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, il est possible de prendre comme termes sources sur le bord interne, une densité surfacique de courant électrique \mathbf{J}_S et une densité surfacique de courant magnétique \mathbf{M}_S définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (5-1)$$

Nous remarquons que lorsque l'on utilise ces sources internes équivalentes dans un calcul, peu importe ce qui se trouve à l'extérieur du bord interne, puisqu'elles y produisent un champ nul.

Conceptuellement, les sources internes définies par (5-1) sont satisfaisantes. Cependant elles ne conviennent pas bien à une description locale du comportement de l'écran généralisé. Prenons un exemple simple. Au chapitre 1, à propos d'un câble, nous avons utilisé un courant de mode commun i_{MC} dans (1-4), et une charge élémentaire $dq_0 = \rho_0 dx$ dans (1-5), considérant qu'il s'agit de phénomènes différents. En fait, en régime harmonique, il serait possible de ne prendre en compte que i_{MC} puisque $j\omega\rho_0$ vaut $-di_{MC}/dz$, et que par conséquent la connaissance de i_{MC} le long du câble donne la valeur de dq_0 . Localement toutefois, ceci ne s'applique pas, car il n'est pas possible de connaître $-di_{MC}/dz$. Ceci correspond au fait qu'expérimentalement, des dispositifs différents sont utilisés pour produire des courants de mode commun ou des charges, sur une longueur très petite devant la longueur d'onde.

Par exemple, pour déterminer les champs produits par les sources équivalentes données par (5-1), en tout point du volume à l'intérieur de l'écran généralisé vide, nous pouvons utiliser les expressions établies par Stratton et Chu [3, § 8.14] :

$$\mathbf{E} = \iint \left[j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H} + \left(\frac{1}{r} + jk \right) \left((\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u} \right) \right] \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dS \quad (5-2)$$

$$\mathbf{H} = \iint \left[j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{n} - \left(\frac{1}{r} + jk \right) \left((\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{u} \right) \right] \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dS \quad (5-3)$$

où les notations habituelles ont été utilisées, avec $r = \|\mathbf{r}\|$ et $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$, l'intégrale de surface portant sur le bord interne. Dans cette expression, les deux termes sources données par (5-1) apparaissent, avec en plus le terme source $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ correspondant à une densité surfacique de charges électriques $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \epsilon_0$, et le terme source $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ correspondant à une densité surfacique de charges magnétiques $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mu_0$. Nous notons que la connaissance de \mathbf{J}_s sur le bord interne nous permet de calculer la composante normale de $\mathbf{rot} \mathbf{H}$, donc $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$, et celle de \mathbf{M}_s nous permet de calculer $\mathbf{rot} \mathbf{E}$ donc $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$, mais comme nous l'avons expliqué plus haut, ces expressions ne peuvent s'appliquer localement. De même, la connaissance d'un des deux champs permet de calculer l'autre, mais cette faculté ne peut s'utiliser localement, ce qui fait que nous considérons (5-2) et (5-3).

Les formules (5-2) et (5-3) sont exactes. Il est important de noter que des approximations sont souvent utilisées dans les calculs. Par exemple, la théorie de la diffraction par une petite ouverture circulaire [4] utilise également (5-2) et (5-3) mais avec un domaine d'intégration limité à l'ouverture, en utilisant seulement les termes de courant magnétique et de charge magnétique.

Pour une description locale permettant de déterminer le champ électrique et le champ magnétique dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, nous avons donc besoin à ce stade de connaître, sur le bord interne, les vecteurs \mathbf{H} et \mathbf{E} . Une simplification est encore possible. Puisque, comme indiqué plus haut, nous pouvons mettre ce que nous voulons à l'extérieur du bord interne, mettons, contre celui-ci, un matériau parfaitement conducteur. Dans ce nouveau problème, il n'y a pas lieu de prendre en compte la contribution de la composante du courant électrique \mathbf{J}_s ni celle des charges électriques $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \epsilon_0$ qui produisent des champs nuls. Ceci se voit en appliquant localement le théorème des images (Harrington démontre que \mathbf{J}_s produit un champ nul en utilisant le théorème de réciprocité [7, § 3.8]).

Finalement, nous avons montré que, pour une description locale du champ électrique et du champ magnétique dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, nous pouvons ne prendre en compte que :

- un conducteur idéal à l'extérieur du bord intérieur,
- les objets se trouvant dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé,
- un terme source égal au courant magnétique $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ déterminé par la composante tangentielle de \mathbf{E} , sur le bord intérieur,
- un terme source égal à la charge magnétique $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mu_0$ déterminée par la composante normale de \mathbf{H} , sur le bord intérieur.

Nous notons que, si l'écran généralisé a un bord interne constitué d'un bon conducteur (presque) homogène, les sources internes équivalentes ainsi définies correspondent, dans le problème réel, à des configurations de champs (presque) interdites : des champs électriques tangentiels à un bon conducteur, donc des champs électriques à basse impédance, et des champs magnétiques normaux à un bon conducteur, donc des champs magnétiques à haute impédance. Ce sont (presque) les analogues des sources de tension et des sources de courant de la théorie des circuits. Ces sources internes équivalentes seront donc très peu affectées par d'éventuelles modifications portant sur les objets dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé. Si, par contre, le bord interne n'est pas constitué d'un bon conducteur homogène, par exemple parce qu'il comporte des ouvertures, comme dans le cas des tresses et des grilles métalliques, les sources internes équivalentes dépendront davantage de telles modifications.

Alternativement, pour une description locale du champ électrique et du champ magnétique dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, nous pouvons prendre en compte :

- les objets se trouvant dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé,
- le champ \mathbf{E} sur le bord intérieur, qui détermine un terme source égal au courant magnétique $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ et un terme source égal à la charge électrique $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \varepsilon_0$,
- le champ \mathbf{H} sur le bord intérieur, qui détermine un terme source égal au courant électrique $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ un terme source égal à la charge magnétique $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \mu_0$.

Dans ce cas nous notons que des expressions telles que (5-2) et (5-3) peuvent être utilisées directement, qu'il peut y avoir n'importe quoi à l'extérieur du bord intérieur (les champs y seront nuls), et que les termes source $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \varepsilon_0$, correspondant aux positions permises des champs, sont probablement très sensibles aux objets placés à l'intérieur du bord intérieur.

5.3 Caractérisation de l'écran généralisé avec la matrice d'écrantage

Pour caractériser l'écran généralisé, il nous faut à présent obtenir qu'un nombre fini de quantités physiques nous permettent de décrire les effets dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, avec une précision suffisante. Par exemple, supposons que l'écran généralisé a un bord interne en forme de cylindre de révolution, et, sur ce bord, appelons $E_r(\theta, z, t)$, $E_\theta(\theta, z, t)$ et $E_z(\theta, z, t)$ les valeurs instantanées des composantes radiale, azimutale et axiale de \mathbf{E} , et appelons $H_r(\theta, z, t)$, $H_\theta(\theta, z, t)$ et $H_z(\theta, z, t)$ les valeur instantanées des composantes radiale, azimutale et axiale de \mathbf{H} . Nous pouvons développer ces quantités en amplitudes hypercomplexes $E_{r_n}(z, \omega)$, $E_{\theta_n}(z, \omega)$, $E_{z_n}(z, \omega)$, $H_{r_n}(z, \omega)$, $H_{\theta_n}(z, \omega)$ et $H_{z_n}(z, \omega)$. Nous avons ainsi :

$$\mathbf{E}(\theta, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^\infty e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \mathbf{E}_n(z, \omega) e^{in\theta} \right\} d\omega \right] \quad (5-4)$$

$$\mathbf{H}(\theta, z, t) = \text{Re} \left[\int_0^\infty e^{j\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \mathbf{H}_n(z, \omega) e^{in\theta} \right\} d\omega \right] \quad (5-5)$$

Pour une précision donnée, en un point z donné, il sera possible de se limiter à un nombre de termes donné dans la série de Fourier : nous avons donc déduit des sources internes équivalentes précédemment définies, l'ensemble fini recherché de quantités physiques.

Dans ce chapitre, nous supposerons que l'écran est linéaire, donc que les dites quantités physiques, données par $E_{r_n}(z, \omega)$, $E_{\theta_n}(z, \omega)$, $E_{z_n}(z, \omega)$, $H_{r_n}(z, \omega)$, $H_{\theta_n}(z, \omega)$, $H_{z_n}(z, \omega)$ dans l'exemple précédent, sont liées par des relations linéaires aux amplitudes naturelles des excitations standards. Cette notion de linéarité est précisée à l'Annexe D, où il est exposé que la linéarité à prendre en compte ici est une \mathbb{C} -linéarité : lorsque les amplitudes naturelles sont multipliées à gauche par un nombre complexe λ , les $E_{z_n}(z, \omega)$, $E_{\theta_n}(z, \omega)$, etc sont aussi multipliées à gauche par λ . Sauf dans le cas d'un écran généralisé possédant la symétrie de révolution pour ses propriétés électriques, nous ne pouvons supposer que la propriété demeure lorsque λ est un quaternion. Si nous décomposons chaque amplitude hypercomplexe X en deux amplitudes complexes $\text{Co}_j(X)$ et $\text{Co}_j(X\mathbf{i})$, que nous appellerons ses *composantes complexes*, nous voyons que la \mathbb{C} -linéarité signifie qu'il existe une application linéaire entre les \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie des amplitudes complexes.

Définition : Matrice d'écrantage. Si nous considérons un ensemble fini de types d'excitation standard, dont les composantes complexes des amplitudes naturelles forment un vecteur \mathbf{N} , et un

nombre fini de quantités physiques scalaires dépendant linéairement des sources internes équivalentes, dont les composantes complexes des amplitudes hypercomplexes forment un vecteur \mathbf{Q} , la matrice d'écrantage \mathbf{S} est la matrice complexe définie par $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \mathbf{N}$.

En général, la matrice d'écrantage dépend de la coordonnée axiale z où l'excitation standard est appliquée, et de la coordonnée axiale z' où l'amplitude hypercomplexe des quantités physique est déterminée. Nous dirons que l'écran généralisé *se conduit bien* si les sources internes équivalentes au point z sont pratiquement seulement liées aux valeurs des champs incidents à la même coordonnée axiale z . Dans ce cas, les sources internes équivalentes n'ont à être considérées que là où les excitations standard se trouvent, et la matrice d'écrantage ne dépend que d'une coordonnée axiale z . Nous attendons d'écrans généralisés minces, c'est-à-dire dont l'épaisseur est beaucoup plus petite que la longueur d'onde des champs incidents et que les dimensions transversales, qu'ils se conduisent bien. Par exemple, Franceschetti [18] a montré qu'un écran homogène mince pouvait être pris en compte en utilisant seulement une discontinuité aux limites, ce qui implique que les sources internes équivalentes dépendent seulement des champs sur le bord externe. Pour des écrans homogènes minces cylindriques de révolution, nous voyons même qu'avec un choix convenable des éléments de \mathbf{N} et \mathbf{Q} , \mathbf{S} sera diagonale.

Bien évidemment, pour un écran généralisé se conduisant bien dont les propriétés locales ne changent pas en fonction de z , la matrice d'écrantage ne dépend pas de z non plus.

La matrice d'écrantage d'un écran généralisé se conduisant bien est manifestement commode pour le caractériser, car, dans une configuration de champs incidents donnée, produite par les sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, il est possible d'établir une décomposition en excitations standards dont les amplitudes naturelles forment un vecteur $\mathbf{N}(z)$. Multiplié par la matrice d'écrantage, ce vecteur donne le vecteur $\mathbf{Q}(z)$ permettant de déterminer les sources internes équivalentes par des relations telles que (5-4) et (5-5), puis les champs dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé.

Nous notons que, si le volume à l'intérieur de l'écran généralisé est vide, il constitue un guide d'onde, et qu'à toute fréquence inférieure à la fréquence de coupure du premier mode de propagation, les sources internes équivalentes produisent seulement des ondes évanescentes, qui n'ont qu'une extension locale. Aux fréquences supérieures à cette fréquence de coupure, les contributions locales des sources internes équivalentes se propagent, et les champs en tout point du volume à l'intérieur de l'écran généralisé résulteront de la combinaison des contributions des sources internes équivalentes distribuées le long de l'écran généralisé, et des réflexions aux

extrémités. Par contre, si le volume à l'intérieur de l'écran généralisé contient des conducteurs le long de Oz, la situation change, car le mode TEM peut, à toute fréquence, propager les contributions locales.

5.4 Caractérisation de l'écran généralisé pour l'émission

Considérons un écran généralisé, caractérisé par une matrice d'écrantage \mathbf{S} . Dans la situation a qui nous intéresse à présent, nous voulons déterminer une émission vers l'extérieur. Les sources fournissant la puissance électromagnétique sont dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, et nous souhaitons déterminer les champs créés à l'extérieur.

Dans cette situation a , les champs sont \mathbf{E}^a et \mathbf{H}^a . Nous supposons que l'écran est suffisamment efficace pour que nous puissions déterminer ces champs dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, indépendamment de ce qui se passe dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Nous pouvons en particulier déterminer la valeur des champs \mathbf{E}^a et \mathbf{H}^a sur le bord interne C_1 . Par application du principe d'équivalence, \mathbf{n} étant comme au § 5.2 le vecteur unitaire normal à C_1 , dirigé vers le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, il est possible, pour déterminer les champs à l'extérieur de C_1 , de remplacer tout ce qui se trouve dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé, par une distribution superficielle de courant électrique de densité surfacique \mathbf{J}_S^a et une distribution superficielle de courant magnétique de densité surfacique \mathbf{M}_S^a définies sur C_1 par :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_S^a = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}^a \\ \mathbf{M}_S^a = -\mathbf{E}^a \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (5-6)$$

Nous considérons donc à présent que \mathbf{J}_S^a et \mathbf{M}_S^a sur le bord interne C_1 sont les termes source pour la détermination des champs \mathbf{E}^a et \mathbf{H}^a dans l'écran généralisé et dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé.

Considérons à présent la situation b , dans laquelle les champs sont \mathbf{E}^b et \mathbf{H}^b . Dans cette situation, tout est comme dans la situation a , sauf que :

- les sources fournissant la puissance électromagnétique qui étaient dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé ne sont plus actives,
- une densité surfacique de courant électrique \mathbf{J}_S^b est appliquée contre le bord externe C_E , du côté extérieur.

Selon le théorème de réciprocité [7, § 3.8], nous pouvons affirmer que :

$$\oiint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = \oiint_{C_I} (\mathbf{E}^b \mathbf{J}_S^a + \mathbf{H}^b \mathbf{M}_S^a) dS \quad (5-7)$$

Dans cette égalité relative à des amplitudes complexes, le membre de droite est une intégrale de surface sur le bord interne (qui n'est pas nécessairement de révolution), dont l'intégrande ne contient que des termes connus : les termes sources \mathbf{J}_S^a et \mathbf{M}_S^a qui remplacent tout ce qui se trouve dans le volume à l'intérieur de l'écran généralisé dans la situation a , et les champs \mathbf{E}^b et \mathbf{H}^b qui peuvent être calculés en utilisant la matrice \mathbf{S} , car \mathbf{J}_S^b peut être décomposé en excitations standards. Le membre de gauche est une intégrale de surface sur le bord externe (qui est de révolution), dont l'intégrande contient le champ cherché \mathbf{E}^a et le terme source arbitraire \mathbf{J}_S^b .

Il est clair qu'en donnant successivement différentes valeurs à \mathbf{J}_S^b , judicieusement choisies, les composantes tangentielles de \mathbf{E}^a peuvent être facilement déterminées, sur tout C_E . Les champs rayonnés en tout point de l'espace par l'écran généralisé, dans la situation a peuvent alors se calculer en appliquant une fois encore le principe d'équivalence. Si \mathbf{n}' est le vecteur unitaire normal à C_E , dirigé vers le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, il est possible, pour déterminer les champs à l'extérieur de C_E , de remplacer tout ce qui se trouve à l'intérieur de celui-ci, premièrement par la densité surfacique de courant magnétique \mathbf{M}'_S^a définie sur C_E par :

$$\mathbf{M}'_S^a = \mathbf{E}^a \times \mathbf{n}' \quad (5-8)$$

et deuxièmement par un bord externe parfaitement conducteur, puisque contrairement au cas conduisant à (5-6), nous n'avons pas de densité surfacique de courant électrique associée.

Selon le problème, il peut être judicieux d'imposer que \mathbf{J}_S^b soit une excitation localisée en un point de la surface de l'écran généralisé, ou bien que \mathbf{J}_S^b corresponde à une excitation standard de type $i_{VA n}$, ou de type $j_{VO n}$. Dans ce dernier cas, nous voyons que la densité surfacique \mathbf{M}'_S^a va être déterminée d'une façon qui la rend facilement utilisable comme condition aux limites dans une formule générale de calcul des ondes cylindriques, telle que (4-1).

5.5 Caractérisation des câbles blindés pour l'action de champs extérieurs

Le problème de la caractérisation d'un écran généralisé cylindrique ne peut être parfaitement traité en tant que tel, car le contenu de l'écran va influencer les sources internes équivalentes sur le bord interne, en présence d'une excitation extérieure, comme discuté à la fin

du § 5.2. Cette influence sera d'autant plus grande que le volume à l'intérieur de l'écran généralisé est plus plein. Le mode de caractérisation que nous avons défini au § 5.3 n'est pas légitime pour un câble blindé, pour cette première raison théorique, l'écran étant très plein, et pour une seconde raison, pratique : il n'est pas possible de mesurer directement les champs sur le bord interne, correspondant aux sources internes équivalentes.

Nous traitons dans ce paragraphe d'un câble écranté contenant N conducteurs internes, ayant des dimensions transversales beaucoup plus petites que les longueurs d'ondes auxquelles nous nous intéresserons. Par conséquent, seuls pourront se propager les modes quasi-TEM de la ligne de transmission multiconductrice (LMC) constituée de l'écran et des conducteurs internes. En pratique, nous sommes uniquement intéressés à décrire ce qui se passe sur les conducteurs internes, aux extrémités d'une section de câble. Par conséquent, la question de la caractérisation de l'écran du câble (qui est en fait un écran généralisé) est remplacée par celle de la caractérisation du câble lui-même.

Considérons donc une section de câble beaucoup plus courte que les longueurs d'onde pertinentes. Si nous considérons tout d'abord le problème interne lorsqu'aucune excitation n'est appliquée par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, nous savons que, en utilisant l'écran du câble comme conducteur de référence, l'interaction entre ce conducteur et les conducteurs internes peut être décrite [51, § 6.2.6] avec une matrice impédance linéique \mathbf{Z} et une matrice admittance linéique \mathbf{Y} , qui sont des matrices carrées d'ordre N . En négligeant les pertes affectant la propagation le long de la LMC, qui ne sont pas essentielles pour notre sujet, cette interaction peut être décrite avec une matrice inductance linéique \mathbf{L} et une matrice capacitance linéique \mathbf{C} , qui sont aussi des matrices carrées d'ordre N , et qui peuvent être représentées par un schéma équivalent d'une longueur élémentaire de LMC, contenant N self-inductances linéiques, $N(N-1)/2$ inductances mutuelles linéiques, et $N(N+1)/2$ capacités linéiques.

Puisque nous négligeons les pertes, raisonnons avec des conducteurs idéaux, et sur des modes de propagation TEM pour la LMC. Nous voyons que ces $N(N+1)/2$ capacités linéiques (ou la matrice \mathbf{C}) décrivent la relation locale entre la circulation du champ électrique entre les conducteurs internes et la charge qu'ils portent, tandis que ces N self-inductances et $N(N-1)/2$ inductances mutuelles linéiques (ou la matrice \mathbf{L}) décrivent la relation entre le flux du champ magnétique entre les conducteurs internes, et le courant qu'ils portent.

Attaquons-nous à présent au problème interne, lorsqu'une excitation est appliquée par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Dans le volume à l'intérieur de l'écran du câble, nous avons expliqué au § 5.2 que ces sources peuvent être représentées par des *sources internes équivalentes* sur le bord interne, lesquelles produisent des champs dans tout le volume à l'intérieur de l'écran du câble. L'effet de ces champs sur les conducteurs internes peut être à son tour pris en compte par des *sources équivalentes aux champs* : des sources de courant linéique pour prendre en compte l'effet du champ électrique injectant du courant de déplacement dans les conducteurs internes, et des sources de tension linéique pour prendre en compte le flux du champ magnétique entre les conducteurs internes. Une fois que les sources redondantes sont éliminées, nous obtenons un schéma équivalent d'une longueur élémentaire de LMC dans lequel N sources de courant linéique et N sources de tension linéique ont été ajoutées au schéma équivalent de la LMC applicable en l'absence d'excitation par des sources dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Un tel schéma équivalent est montré sur la figure 5-1, pour le cas $N = 3$.

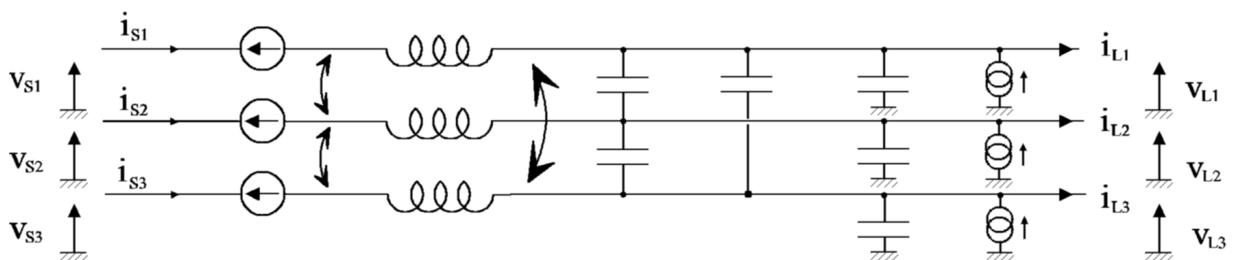


Fig. 5-1 : schéma équivalent pour les conducteurs internes d'une petite longueur de câble multiconducteur écrané excité par un champ électromagnétique.

La caractérisation complète du câble pourra donc consister en la détermination des amplitudes complexes de ces $2N$ sources équivalentes aux champs, pour les différentes excitations standards du cylindre de révolution, en fonction de leur amplitude naturelle. Nous avons déjà dit au § 5.3 que nous supposons que l'écran est linéaire. Par conséquent, les amplitudes complexes des sources équivalentes aux champs sont liées par des relations linéaires aux amplitudes naturelles des excitations standards, et comme au § 5.3, la linéarité à prendre en compte est une \mathbb{C} -linéarité. Pour les excitations standards de type i_{VA0} , de type ρ_{L0} , et de type j_{VO0} , dont les amplitudes naturelles sont des nombres complexes, chaque coefficient λ reliant l'amplitude naturelle à l'amplitude d'une des $2N$ sources équivalentes aux champs est un nombre complexe. Pour les excitations standards autres que celles de type i_{VA0} , de type ρ_{L0} , et de type j_{VO0} , dont les amplitudes sont des quaternions, deux approches sont possibles :

- la première consiste à utiliser l'approche du § 5.3, selon laquelle nous décomposons chaque amplitude naturelle X en deux *composantes complexes* $Co_j(X)$ et $Co_j(X\mathbf{i})$, puis nous utilisons

deux coefficients complexes distincts λ_A et λ_B pour relier ces composantes complexes à chacune des $2N$ sources équivalentes aux champs ;

- la seconde consiste à utiliser un seul coefficient λ hypercomplexe pour relier l'amplitude naturelle à l'amplitude d'une des $2N$ sources équivalentes aux champs, en décidant que cette relation est $\text{Co}_j(X\lambda)$, qui permet bien de prendre en compte la relation \mathbb{C} -linéaire la plus générale entre un quaternion X et un nombre complexe [Annexe D].

A moins que la structure du câble ne soit très exotique, nous pouvons assez naturellement supposer que pour les excitations standards à basse impédance (i.e. les excitations standards de type i_{VA_n} , et de type j_{VO_n}) nous pouvons négliger les N sources équivalentes aux champs qui sont des sources de courant, et que pour les excitations standard à haute impédance (excitations standards de type ρ_{L_n}) nous pouvons négliger les N sources équivalentes aux champs qui sont des sources de tension. En fait, il existe des circuits passifs qui sont capables de convertir une haute impédance d'entrée en une basse impédance de sortie (et vice-versa) par exemple des circuits LC à la résonance et les transformateurs, mais les câbles écrantés ne sont pas supposés se comporter de cette façon !

5.6 Les cinq principaux types de couplage

Si nous supposons que les excitations standards de type i_{VA_0} , de type ρ_{L_0} , de type j_{VO_0} , de type ρ_{L_1} et de type i_{VA_1} permettent une description suffisamment précise du comportement d'un câble écranté conforme aux hypothèses du paragraphe précédent, nous en venons à le caractériser avec cinq paramètres pour chacun des N conducteur internes, correspondant aux cinq types de couplage. Ces paramètres répondent aux définitions suivantes.

- Le couplage de type 1 est celui pour lequel le câble est caractérisé par N impédances linéiques de transfert. L'amplitude naturelle de l'excitation standard, de type i_{VA_0} , est l'amplitude complexe i_{VA_0} du courant axial. Sur une longueur élémentaire dz de câble, ce couplage produit l'apparition, le long du conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = Z_{T\alpha} i_{VA_0} dz \quad (5-9)$$

où $Z_{T\alpha}$ est l'impédance linéique de transfert pour le conducteur α , exprimées en Ω/m , qui est un nombre complexe. Notons que, selon cette définition, l'amplitude complexe i_{VA_0} du courant axial n'est pas exactement le *courant de mode commun*, noté i_{MC} , utilisé dans (1-4). En fait, les deux peuvent ici être confondus, car les courants des sources sont conservés lors du passage du câble réel à l'écran pourvu d'un bord de révolution parfaitement conducteur.

■ Le couplage de type 2 est celui pour lequel le câble est caractérisé par N coefficients de couplage électrique radial. L'amplitude naturelle de l'excitation standard, de type ρ_{L0} , est l'amplitude complexe ρ_{L0} de la densité linéique de charge. Sur une longueur élémentaire dz de câble, ce couplage produit l'injection, sur le conducteur interne α , d'un courant di_α égal à :

$$di_\alpha = j\omega \zeta_{R\alpha} \rho_{L0} dz \quad (5-10)$$

où $\zeta_{R\alpha}$ est le coefficient de couplage électrique radial pour le conducteur α , sans dimension, qui est un nombre complexe. Nous retrouvons bien (1-5).

■ Le couplage de type 3 est celui pour lequel le câble est caractérisé par N impédances de transfert axial. L'amplitude naturelle de l'excitation standard, de type j_{VO0} , est l'amplitude complexe $-j_{VO0}/(2\pi)$. Sur une longueur élémentaire dz de câble, ce couplage produit l'apparition, le long du conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = Z_{AT\alpha} \frac{-j_{VO0}}{2\pi} dz \quad (5-11)$$

où $Z_{AT\alpha}$ est l'impédance de transfert axial pour le conducteur α , exprimée en Ω , qui est un nombre complexe. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ magnétique axial et uniforme, l'amplitude naturelle est égale à l'amplitude complexe du champ magnétique appliqué, et nous retrouvons (1-6).

■ Le couplage de type 4 est celui pour lequel le câble est caractérisé par N admittances de transfert parallèle. L'amplitude naturelle de l'excitation standard, de type ρ_{L1} , est l'amplitude hypercomplexe est $\rho_{L1}/(4\pi r_E \epsilon_0)$. Sur une longueur élémentaire dz de câble, ce couplage produit l'injection, sur le conducteur interne α , d'un courant di_α égal à :

$$di_\alpha = Co_j \left(\frac{\rho_{L1}}{4\pi r_E \epsilon_0} Y_{PT\alpha} \right) dz \quad (5-12)$$

où $Y_{PT\alpha}$ est l'admittance de transfert parallèle pour le conducteur α , exprimée en S, qui est un quaternion. Cette expression suppose que l'origine des angles est la même pour ρ_{L1} et pour $Y_{PT\alpha}$. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ magnétique uniforme dans un plan orthogonal à l'axe du câble, l'amplitude naturelle est l'amplitude hypercomplexe de ce champ magnétique appliqué, en accord avec (1-7) qui n'est cependant valable que pour un seul angle d'incidence. Il est important de noter que, sur un écran réel, les courants prennent préférentiellement le chemin le moins résistif. Il est donc clair (voir la fig. 1-6) que les charges produites par l'excitation standard de type ρ_{L1} viendront en premier lieu d'une réponse standard

de type j_{VO1} , conformément à (2-18), sauf dans le cas d'un écran pathologique, conçu pour éviter leur circulation (par exemple un écran avec des fentes longitudinales).

■ Le couplage de type 5 est celui pour lequel le câble est caractérisé par N impédances de transfert parallèle. L'amplitude naturelle de l'excitation standard, de type i_{VA1} , est l'amplitude hypercomplexe $i_{VA1}/(4\pi r_E)$. Sur une longueur élémentaire dz de câble, ce couplage produit l'apparition, le long du conducteur interne α , de la tension dv_α égale à :

$$dv_\alpha = \text{Co}_j \left(\frac{i_{VA1}}{4\pi r_E} Z_{PT\alpha} \right) dz \quad (5-13)$$

où $Z_{PT\alpha}$ est l'impédance de transfert parallèle pour le conducteur α , exprimées en Ω , qui est un quaternion. Cette expression suppose que l'origine des angles est la même pour i_{VA1} et pour $Z_{PT\alpha}$. Dans le cas particulier où le champ appliqué est un champ magnétique uniforme dans un plan orthogonal à l'axe du câble, l'amplitude naturelle est l'amplitude hypercomplexe de ce champ magnétique appliqué, en accord avec (1-8) qui n'est en outre valable que pour un seul angle d'incidence.

5.7 Caractérisation des câbles blindés pour l'émission

Pour déterminer l'émission par un câble écranté, nous allons procéder comme au § 5.4, et nous nous limiterons aux cinq principaux types de couplage. Considérons un câble écranté, contenant N conducteurs internes, caractérisé par N impédances linéiques de transfert Z_T , par N coefficients de couplage électrique radial ζ_R , par N impédances de transfert axial Z_{AT} , par N admittances de transfert parallèle Y_{PT} , et par N impédances de transfert parallèle Z_{PT} . Dans la situation a qui nous intéresse à présent, nous voulons déterminer l'émission par le câble, dans une configuration donnée, dans laquelle les seules sources de puissance électromagnétique sont p sources de tension de force électromotrice V_1^a à V_p^a , et q sources de courant de courant I_1^a à I_q^a , existant dans un des circuits connectés aux conducteurs internes de chaque côté du câble.

Dans cette situation a , les champs sont \mathbf{E}^a et \mathbf{H}^a . Nous supposons que l'écran est suffisamment efficace pour que nous puissions traiter la propagation le long des conducteurs internes indépendamment de ce qui se passe dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé. Nous pouvons en particulier déterminer la valeur des tensions et des courants sur les conducteurs internes, tout le long du câble.

Considérons à présent la situation b , dans laquelle les champs sont \mathbf{E}^b et \mathbf{H}^b . Dans cette situation, tout est comme dans la situation a , sauf que :

- les p sources de tension et q sources de courant ne sont plus actives,
- une distribution superficielle de courant électrique de densité surfacique \mathbf{J}_S^b est appliquée contre le bord externe C_E , du côté extérieur,
- en utilisant la convention des récepteurs, le courant à travers le court-circuit remplaçant la source de tension k est I_k^b , et la tension aux bornes du circuit ouvert remplaçant la source de courant k est V_k^b .

Selon le théorème de réciprocité [7, § 3.1 et § 3.8], nous pouvons donc affirmer que :

$$\oint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = \sum_{k=1}^p I_k^b V_k^a - \sum_{k=1}^q I_k^a V_k^b \quad (5-14)$$

Dans cette égalité, qui ne contient que des amplitudes complexes, les sommations du membre de droite ne contiennent que des termes connus : les V_k^a et I_k^a sont des données dans le problème de la situation a , et les V_k^b et I_k^b peuvent être calculés en utilisant les paramètres pour les cinq principaux types de couplage, puisque \mathbf{J}_S^b peut être décomposé en excitations standards. Le terme de gauche est une intégrale de surface sur le bord externe (qui est de révolution), dont l'intégrande contient le champ cherché \mathbf{E}^a et le terme source arbitraire \mathbf{J}_S^b .

Comme au § 5.4, il est clair qu'en donnant successivement différentes valeurs à \mathbf{J}_S^b , judicieusement choisies, les composantes tangentielles de \mathbf{E}^a peuvent être facilement déterminées, sur tout C_E . Après cette première étape, les champs rayonnés en tout point de l'espace par l'écran généralisé, dans la situation a , peuvent se calculer en appliquant le principe d'équivalence, qui donne (5-8). Notons que la première étape peut être effectuée globalement, ou localement. Dans ce dernier cas, nous pouvons l'accomplir, comme suit.

Pour déterminer l'effet d'un courant i_α parcourant le conducteur α dans la situation a , nous considérons une section de longueur ℓ électriquement courte du câble écranté, dont tous les conducteurs sont court-circuités à l'extrémité éloignée, l'extrémité proche comportant une source de courant connectée entre le conducteur α et l'écran du câble, les autres conducteurs étant laissés en l'air. Bien entendu, les extrémités sont supposées ne produire aucun rayonnement et ne pas influencer le comportement de la section de câble. Passons à la situation b . Pour déterminer les excitations standards, nous remplaçons l'écran réel par un cylindre de révolution parfaitement conducteur. La valeur à donner à \mathbf{J}_S^b pour obtenir un vecteur courant total \mathbf{i}_V donné se déduit de

la condition suivante: \mathbf{J}_S^b doit annuler le champ magnétique normal au bord externe produit par \mathbf{i}_V . En utilisant (2-10), nous constatons que \mathbf{i}_V est :

$$\mathbf{i}_V = -2\pi r_E \mathbf{J}_S^b \quad (5-15)$$

Nous développons alors la composante radiale, la composante azimutale et la composante axiale de \mathbf{E}^a en amplitudes hypercomplexes $E_{rn}^a(z, \omega)$, $E_{\theta n}^a(z, \omega)$ et $E_{zn}^a(z, \omega)$ qui sont liées aux amplitudes complexes correspondantes, par :

$$\mathbf{E}^a(\theta, z, \omega) = \text{Co}_j \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n^a(z, \omega) e^{in\theta} \right] \quad (5-16)$$

Pour le membre de gauche de (5-14), si le terme source arbitraire \mathbf{J}_S^b est axial, en utilisant (5-15), nous obtenons facilement que

$$\oiint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = \frac{-\ell}{2} \left\{ 2E_{z0}^a i_{VA0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{Co}_j(E_{zn}^a) \text{Co}_j(i_{VA n}) + \text{Co}_j(E_{zn}^a \mathbf{i}) \text{Co}_j(i_{VA n} \mathbf{i}) \right] \right\} \quad (5-17)$$

tandis que si \mathbf{J}_S^b est azimutal, nous obtenons

$$\oiint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = \frac{-\ell r_E}{2} \left\{ 2E_{\theta 0}^a j_{VO0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{Co}_j(E_{\theta n}^a) \text{Co}_j(j_{VO n}) + \text{Co}_j(E_{\theta n}^a \mathbf{i}) \text{Co}_j(j_{VO n} \mathbf{i}) \right] \right\} \quad (5-18)$$

Pour le membre de droite de (5-14), nous obtenons, en nous limitant aux termes correspondant aux cinq principaux types de couplage, et à un seul courant i_α dans la situation a :

$$\sum_{k=1}^p I_k^b V_k^a - \sum_{k=1}^q I_k^a V_k^b = -\ell i_\alpha \left\{ i_{VA0} Z_T + \frac{\text{Co}_j(i_{VA1}) \text{Co}_j(Z_{PT}) + \text{Co}_j(i_{VA1} \mathbf{i}) \text{Co}_j(\mathbf{i} Z_{PT})}{4\pi r_E} \right\} \quad (5-19)$$

et

$$\sum_{k=1}^p I_k^b V_k^a - \sum_{k=1}^q I_k^a V_k^b = \ell i_\alpha \frac{j_{VO0}}{2\pi} Z_{AT} \quad (5-20)$$

Ces formules correspondent évidemment à l'application d'un vecteur courant total \mathbf{i}_V indépendant de z . En ne donnant qu'à un des termes, bien choisi, une valeur non nulle nous obtenons, pour $n = 0$,

$$E_{z0}^a = i_\alpha Z_{T\alpha} \quad (5-21)$$

et

$$E_{\theta 0}^a = -i_\alpha \frac{Z_{AT\alpha}}{2\pi r_E} \quad (5-22)$$

et pour $n = 1$,

$$E_{z1}^a = \frac{i_\alpha}{2\pi r_E} \text{Op}_i(Z_{PT\alpha}) \quad (5-23)$$

où la fonction Op_i est par définition celle qui transforme un quaternion $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$ quelconque, avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, en $\text{Op}_i(x) = x_1 - x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$.

Pour déterminer à présent l'effet d'une tension v_α sur le conducteur α dans la situation a , nous considérons une section de longueur ℓ électriquement courte du câble écrané, dont tous les conducteurs sont en circuit ouvert à l'extrémité éloignée, l'extrémité proche comportant une source de tension connectée entre le conducteur α et l'écran du câble, les autres conducteurs étant connectés à l'écran. Comme précédemment, les extrémités sont supposées ne produire aucun rayonnement et ne pas influencer le comportement de la section de câble, et (5-15) à (5-18) s'appliquent dans la situation b .

Pour obtenir le terme en ρ_{L0} , nous ne pouvons plus utiliser un vecteur courant total \mathbf{i}_v indépendant de z . Si nous imposons que ρ_{L0} soit indépendant de z , (2-17) nous donne la dérivée du courant total. La meilleure solution est évidemment

$$i_{VA0} = j\omega \left(z - \frac{\ell}{2} \right) \rho_{L0} \quad (5-24)$$

puisque'elle ne produit pas d'effet global par couplage de type 1. Cependant, n'imposons pas de fonction particulière pour i_{VA0} . Pour le membre de gauche de (5-14), en utilisant (5-15), nous obtenons :

$$\oint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = - \int_0^\ell E_{0z}^a i_{VA0} dz \quad (5-25)$$

Pour le membre de droite de (5-14), nous utilisons (2-17) et nous procédons à une intégration par parties, ce qui donne :

$$V^a I^b = - \left[i_{VA0} v_\alpha \zeta_{R\alpha} \right]_0^\ell + \int_0^\ell i_{VA0} \frac{d v_\alpha \zeta_{R\alpha}}{dz} dz \quad (5-26)$$

Les deux extrémités de la section de câble sont évidemment bien écranées, ce qui permet d'éliminer le premier terme du membre de droite de (5-26). Comme l'égalité de (5-25) et (5-26) doit être réalisée indépendamment du choix de i_{VA0} , nous obtenons :

$$E_{z0}^a = \frac{d v_\alpha \zeta_{R\alpha}}{dz} \quad (5-27)$$

Pour obtenir le terme en ρ_{L1} , nous pouvons, selon (2-18) utiliser un vecteur courant total \mathbf{i}_V avec une composante axiale i_{VA1} dépendant de z , ou avec j_{VO1} indépendant ou non de z , ou toute combinaison linéaire des deux. Comme précédemment, n'imposons pas de fonction particulière pour i_{VA1} et prenons j_{VO1} indépendant de z . Pour le membre de gauche de (5-14), en utilisant (5-15), nous obtenons :

$$\oiint_{C_E} \mathbf{E}^a \mathbf{J}_S^b r d\theta dz = \frac{-1}{2} \left\{ \ell r_E \left[\text{Co}_j(E_{\theta 1}^a) \text{Co}_j(j_{VO1}) + \text{Co}_j(E_{\theta 1}^a \mathbf{i}) \text{Co}_j(j_{VO1} \mathbf{i}) \right] + \int_0^\ell \left[\text{Co}_j(E_{z1}^a) \text{Co}_j(i_{VA1}) + \text{Co}_j(E_{z1}^a \mathbf{i}) \text{Co}_j(i_{VA1} \mathbf{i}) \right] dz \right\} \quad (5-28)$$

Pour le terme de gauche, nous procédons comme précédemment, et nous obtenons :

$$\begin{cases} E_{z1}^a = \frac{-1}{j\omega 2\pi\epsilon_0 r_E} \text{Op}_i \left(\frac{dv_\alpha Y_{PT\alpha}}{dz} \right) \\ E_{\theta 1}^a = \frac{v_\alpha}{j\omega 2\pi\epsilon_0 r_E^2} \text{Op}_i \left(\mathbf{i} Y_{PT\alpha} \right) \end{cases} \quad (5-29)$$

Finalement, nous avons donc déterminé les composantes $n = 0$ et $n = 1$ de l'amplitude hypercomplexe de la densité surfacique de courant magnétique \mathbf{M}'_S définie sur C_E par (5-8), provoquée par un courant et une tension sur le conducteur α :

$$\mathbf{M}'_{S0} = \left(i_\alpha Z_{T\alpha} + \frac{d v_\alpha \zeta_{R\alpha}}{dz} \right) \mathbf{e}_\theta + i_\alpha \frac{Z_{AT\alpha}}{2\pi r_E} \mathbf{e}_z \quad (5-30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{S1} = & \left(\frac{i_\alpha}{2\pi r_E} \text{Op}_i (Z_{PT\alpha}) - \frac{1}{j\omega 2\pi\epsilon_0 r_E} \text{Op}_i \left(\frac{dv_\alpha Y_{PT\alpha}}{dz} \right) \right) \mathbf{e}_\theta \\ & - \frac{v_\alpha}{j\omega 2\pi\epsilon_0 r_E^2} \text{Op}_i \left(\mathbf{i} Y_{PT\alpha} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5-31)$$

où \mathbf{e}_θ est le vecteur unitaire azimutal et \mathbf{e}_z le vecteur unitaire axial des coordonnées cylindriques.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les paramètres permettant de caractériser les performances d'écrantage d'un écran et d'un câble écranté, et nous avons exposé comment ces paramètres, introduits initialement pour traiter un problème d'action de champs extérieurs, pouvaient être utilisés pour traiter les problèmes d'émission. Nous mettrons ces concepts en oeuvre au § 6.5 et au § 6.6.

Ce chapitre couvrait la matière exposée dans les § IV à VI de [58], mais avec de nombreuses améliorations et extensions, notamment en ce qui concerne l'utilisation correcte du principe d'équivalence et le traitement de l'émission. Un point essentiel est que les définitions des paramètres des cinq principaux types de couplage pour les câbles ont été changées, de façon à utiliser la définition générale des amplitudes naturelles. Sans cela, en définissant par exemple les paramètres pour les couplages de type 3 à 5 comme au § 1.4, rien n'aurait été dit sur le sens de ces paramètres lorsque les champs appliqués ne sont pas homogènes.

Après la discussion du § 5.5, nous avons finalement utilisé au § 5.6 des quantités hypercomplexes pour définir l'admittance de transfert parallèle et l'impédance de transfert parallèle. Si nous devons faire face à une allergie aux quaternions, il est possible d'utiliser deux admittances de transfert complexes $Y_{PTA\alpha} = \text{Co}_j(Y_{PT\alpha})$ et $Y_{PTB\alpha} = \text{Co}_j(\mathbf{i} Y_{PT\alpha})$ et deux impédances de transfert parallèle complexes $Z_{PTA\alpha} = \text{Co}_j(Z_{PT\alpha})$ et $Z_{PTB\alpha} = \text{Co}_j(\mathbf{i} Z_{PT\alpha})$. Dans ce cas, l'amplitude hypercomplexe ρ_{L1} doit être décomposée en ses composantes complexes $\rho_{LA1} = \text{Co}_j(\rho_{L1})$ et $\rho_{LB1} = \text{Co}_j(\rho_{L1}\mathbf{i})$, et l'amplitude hypercomplexe i_{VA1} doit être décomposée en ses composantes complexes $i_{LAA1} = \text{Co}_j(i_{VA1})$ et $i_{VAB1} = \text{Co}_j(i_{VA1}\mathbf{i})$. Les formules (5-12) et (5-13) sont alors respectivement remplacées par

$$di_\alpha = \frac{1}{4\pi r_E \epsilon_0} (Y_{PTA\alpha} \rho_{LA1} - Y_{PTB\alpha} \rho_{LB1}) dz \quad (5-32)$$

et

$$dv_\alpha = \frac{1}{4\pi r_E} (Z_{PTA\alpha} i_{VAA1} - Z_{PTB\alpha} i_{VAB1}) dz \quad (5-33)$$

Par ailleurs, du fait que la multiplication d'une amplitude naturelle à droite par \mathbf{i} a le sens physique d'une rotation de $\pi/2n$ où n est l'indice de l'amplitude naturelle (voir § 3.6), nous voyons que les deux admittances de transfert parallèle complexes et les deux impédances de transfert parallèle complexes correspondent en fait à l'application des champs selon deux azimuts distants de $\pi/2$. Bien entendu, que nous manipulions deux paramètres complexes ou bien un paramètre hypercomplexe, nous avons toujours affaire à quatre paramètres réels. Cependant, le prix à payer pour n'utiliser que des expressions complexes est lourd, puisqu'il y a deux fois plus de termes à prendre en compte.

Chapitre 6 : Traitement de problèmes canoniques

6.1 Introduction

Ce chapitre va nous permettre d'utiliser, sur des problèmes simples et importants, les définitions et résultats du chapitre 5. Rappelons auparavant que nous avons déjà traité les problèmes canoniques suivants.

- Au § 1.7, nous avons traité, pour un câble électriquement court posé sur un plan de masse et soumis à l'action d'une onde plane se propageant parallèlement à ce plan, le cas de l'excitation transversale, et le cas de l'excitation longitudinale. Nous allons reprendre cet exemple au § 6.4, en profitant des développements plus rigoureux du § 5.6, et en faisant apparaître explicitement plutôt qu'implicitement la décomposition en excitations standards.

- Dans la démonstration du théorème 7 du § 2.5, en nous appuyant sur le théorème de l'Annexe B, nous avons défini des modes de réalisation de certaines réponses tangentielles sur un écran généralisé dont le bord externe est un conducteur électrique idéal. Nous voyons que ces modes de réalisation permettent en particulier de produire toutes les excitations standards en un point z . Malheureusement, nous constatons aussi qu'approcher ces modes de réalisation avec un dispositif réel serait très complexe.

- Au § 4.5, nous avons défini des dispositifs plus réalistes permettant de produire rigoureusement les excitations standards. Nous avons même représenté la forme des électrodes des bancs à $2n$ électrodes pouvant être utilisés court-circuités pour obtenir localement une excitation standard de type i_{VA_n} , ou utilisés en circuit ouvert pour obtenir localement une excitation standard de type ρ_{Ln} . Ces résultats sont la base des méthodes de mesure que nous décrirons au chapitre 7.

Nous allons à présent traiter un exemple de problème d'action des champs extérieurs, et deux exemples de problèmes d'émission, illustrant l'emploi des cinq principaux types de couplage.

6.2 Potentiel complexe d'un cylindre conducteur au-dessus d'un plan de masse

Un peu comme nous avons fait au § 1.7.2, mais de façon plus générale et plus précise, nous allons à présent établir quelques résultats concernant la distribution de charge électrostatique sur un cylindre de révolution conducteur au-dessus d'un plan de masse conducteur, soumis à l'action d'un champ électrique extérieur.

Nous considérons donc un cylindre de révolution conducteur de rayon r_E placé à une hauteur $h - r_E$ au dessus d'un plan de masse horizontal infini conducteur. L'axe Oz du cylindre est donc parallèle au plan de masse, à une distance h de celui-ci. L'origine O étant sur cet axe, choisissons l'axe Ox vertical, dirigé vers le haut. Un champ électrostatique uniforme \mathbf{E}_0 est appliqué, avec des lignes de champ partout parallèles à Ox, par exemple en utilisant un second plan infini conducteur, parallèle au premier, à une hauteur bien plus grande que $r_E + h$, connecté à une source de tension convenable. Nous souhaitons déterminer la distribution de charge sur le cylindre, en utilisant un développement en réponses standards ρ_{Ln} , qui seront évidemment uniformes, c'est-à-dire indépendantes de la coordonnée z le long du cylindre.

Pour atteindre ce but, nous commençons par déterminer le potentiel complexe produit par des réponses standards uniformes apparaissant sur le cylindre conducteur quand il est soumis à un champ exciteur *donné*, uniforme le long du cylindre, produit par des charges extérieures. Compte tenu de la symétrie du problème à résoudre, nous nous limiterons au cas où le champ exciteur, et par conséquent les champs produits par les réponses standards, sont symétriques par rapport au plan d'équation $y = 0$ contenant l'axe du cylindre et orthogonal au plan de masse. Le champ réel $E_L(\theta)$ total (somme du champ exciteur et de celui produit par les réponses standards) est normal au bord, et peut être développé en une série de Fourier angulaire :

$$E_L(\theta) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} E_{Ln} e^{in\theta} \right] \quad (6-1)$$

où l'origine de l'azimut θ est l'axe Ox. En utilisant la première ligne de (4-6), qui s'applique ici, nous obtenons:

$$E_{Ln} = \frac{\rho_{Ln}}{2\pi \epsilon_0 r_E} \quad (6-2)$$

en notant que ρ_{Ln} et E_{Ln} sont des nombres complexes, puisque la fréquence est nulle, et même des nombres réels, du fait de la symétrie par rapport au plan $y = 0$ qui implique l'invariance par changement du signe de θ .

Considérons à présent le potentiel complexe ζ_0 produit par un monopôle cylindrique seul dans l'espace, à l'emplacement de l'axe du cylindre [Annexe C, § C.3]. Selon (C-11), nous avons :

$$\zeta_0 = -\frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \ln(x + i y) \quad (6-3)$$

où p_0 est le moment du dipôle cylindrique d'ordre 0, c'est-à-dire sa densité linéique de charge. Le champ électrique produit est l'opposé du conjugué de la dérivée du potentiel, soit :

$$E_x + i E_y = \frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{x - i y} = \frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \frac{e^{i\theta}}{r} \quad (6-4)$$

En comparant cette expression avec (6-1) et (6-2) nous trouvons bien sûr que le multipôle cylindrique d'ordre 0 produit, pour $r \geq r_E$ le même champ qu'une réponse standard de type ρ_{L0} uniforme, d'amplitude $\rho_{L0} = p_0$, car nous avons dans les deux cas le même champ sur le bord $r = r_E$.

Pour $n \geq 1$, considérons le potentiel complexe ζ'_n produit par un multipôle cylindrique d'ordre n seul dans l'espace, à l'emplacement de l'axe du cylindre. Selon (C-13), nous obtenons à présent :

$$\zeta'_n = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(x + i y)^n} \quad (6-5)$$

où p_n est le moment multipolaire complexe du multipôle cylindrique d'ordre n . Comme nous ne nous intéressons qu'à des champs symétriques par rapport au plan $y = 0$, la partie réelle de ζ'_n doit être invariante par changement du signe de y . Il en résulte que p_n doit être un nombre réel. Le champ produit par ζ'_n est :

$$E_x + i E_y = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{n}{(x - i y)^{n+1}} = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{n e^{i(n+1)\theta}}{r^{n+1}} \quad (6-6)$$

Ce champ ne correspond pas à un champ électrique orthogonal au bord du cylindre. Ceci n'est pas choquant, puisqu'il ne peut exister seul sur un cylindre conducteur. Le § C.7 sur l'inversion analytique nous montre en effet que le potentiel complexe donné par (6-5) est produit par les charges sur un cylindre de révolution conducteur, en réaction à un potentiel complexe créé par des sources extérieures, donné par

$$\zeta''_n = \frac{-p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{(x + i y)^n}{r_E^{2n}} \quad (6-7)$$

Le potentiel ζ''_n a bien sa partie réelle symétrique par rapport au plan $y = 0$, et produit le champ

$$E_x + i E_y = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{n(x - i y)^{n-1}}{r_E^{2n}} = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{n r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta}}{r_E^{2n}} \quad (6-8)$$

Le potentiel complexe $\zeta_n = \zeta'_n + \zeta''_n$ correspond donc à un champ électrique en $r = r_E$ donné par

$$E_x + i E_y = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{n e^{i\theta}}{r_E^{n+1}} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{p_n}{\pi \varepsilon_0} \frac{n e^{i\theta}}{r_E^{n+1}} \cos n\theta \quad (6-9)$$

qui est bien un champ normal au cylindre. En comparant ce résultat avec (6-1) et (6-2), nous trouvons que, pour $n \geq 1$, le potentiel complexe ζ_n produit le même champ que celui qui existe en $r \geq r_E$ lorsqu'une réponse standard de type ρ_{Ln} uniforme d'amplitude

$$\rho_{Ln} = \frac{2n p_n}{r_E^n} \quad (6-10)$$

est présente, car nous avons dans les deux cas le même champ sur le bord $r = r_E$.

Puisque le potentiel complexe ζ'_n est celui qui est effectivement produit par la réponse standard de type ρ_{Ln} uniforme, tandis que le potentiel complexe ζ''_n est celui qui excite cette réponse standard, nous concluons que toute distribution de charge uniforme sur le cylindre conducteur, spécifiée à l'aide des amplitudes ρ_{Ln} des réponses standards, produit en $r \geq r_E$ un potentiel complexe égal à :

$$\zeta = -\frac{\rho_{L0}}{2\pi \varepsilon_0} \ln(x + i y) + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{Ln}}{n} \frac{r_E^n}{(x + i y)^n} \quad (6-11)$$

A présent, nous sommes en mesure de déterminer le potentiel complexe apparaissant dans le problème original du cylindre au-dessus du plan de masse, soumis au champ \mathbf{E}_0 . Nous devons ici considérer le potentiel complexe donné par (6-11), son image complexe (qui produirait un potentiel complexe opposé du conjugué de celui apparaissant au point opposé du conjugué, si l'origine était sur le plan de masse), et le potentiel complexe du champ homogène \mathbf{E}_0 parallèle à Ox et de projection E_0 sur cet axe. En $r \geq r_E$, nous obtenons :

$$\zeta = -\frac{\rho_{L0}}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{x + i y}{-x - i y - 2h} + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{Ln} \frac{1}{n} \left\{ \frac{r_E^n}{(x + i y)^n} - \frac{r_E^n}{(-x - i y - 2h)^n} \right\} - (x + i y + h) E_0 \quad (6-12)$$

où les amplitudes ρ_{Ln} des réponses standards sont réelles. En tout point du plan de masse, nous avons $x = -h$, et nous constatons que la partie réelle du potentiel complexe, qui est le potentiel,

s'y annule bien. La partie réelle du potentiel complexe doit prendre une valeur constante en $r = r_E$, puisque c'est la surface d'un conducteur. Du fait de la présence du logarithme, ceci ne peut être obtenu exactement qu'avec un nombre infini de termes non nuls dans la série, lorsque le cylindre est globalement chargé. Si nous nous limitons à une solution approchée avec $M+1$ termes, (6-12) est idéale pour une détermination directe des réponses standards par la méthode des moments avec ajustement des valeurs en des points. Le système à résoudre est :

$$\rho_{L0} \ln \left(1 + \frac{4h^2}{r_E^2} + \frac{4h}{r_E} \cos \theta \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{Ln}}{n} \operatorname{Re} \left\{ e^{-in\theta} - \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2h}{r_E} + e^{i\theta} \right)^n} \right\} =$$

$$4\pi \varepsilon_0 E_0 r_E \left(\cos \theta + \frac{h}{r_E} \right) + 4\pi \varepsilon_0 V \quad (6-13)$$

où V est le potentiel du cylindre conducteur. Il est nécessaire d'utiliser $M+1$ valeurs θ_m de l'azimut θ , par exemple $\theta_m = 2m\pi / (2M+1)$ pour m entre 0 et M . Nous devons considérer que la solution générale est la superposition de la solution pour $V = 0$ et de la solution pour $E_0 = 0$. Pour $V = 0$ nous définissons la quantité sans dimension

$$\rho_{LnZV} = \frac{\rho_{Ln}}{4\pi \varepsilon_0 r_E E_0} \quad (6-14)$$

et pour $E_0 = 0$ nous définissons la quantité sans dimension

$$\rho_{LnZF} = \frac{\rho_{Ln} h}{4\pi \varepsilon_0 r_E V} \quad (6-15)$$

Nous avons calculé ces deux quantités en fonction du paramètre h/r_E prenant ses valeurs entre 1 et 10. Les figures 6-1 et 6-2 montrent les résultats obtenus pour $n = 0$ à $n = 3$, les calculs étant effectués avec $M = 40$. Ces résultats sont universels, puisqu'en utilisant les courbes de ces figures avec une valeur convenable de la hauteur normalisée h/r_E , nous obtenons $\rho_{L0}, \rho_{L1}, \rho_{L2}$ et ρ_{L3} en ajoutant la valeur de ρ_{Ln} donnée par (6-14), correspondant à l'effet de E_0 , à la valeur de ρ_{Ln} donnée par (6-15), correspondant à l'effet de V/h . Comme nous nous y attendions, nous constatons qu'il y a peu de différence entre les résultats de (6-14), correspondant à $V = 0$, montrés sur la figure 6-1 et ceux de (6-15), correspondant à $E_0 = 0$, montrés sur la figure 6-2, pour les valeurs élevées de h/r_0 .

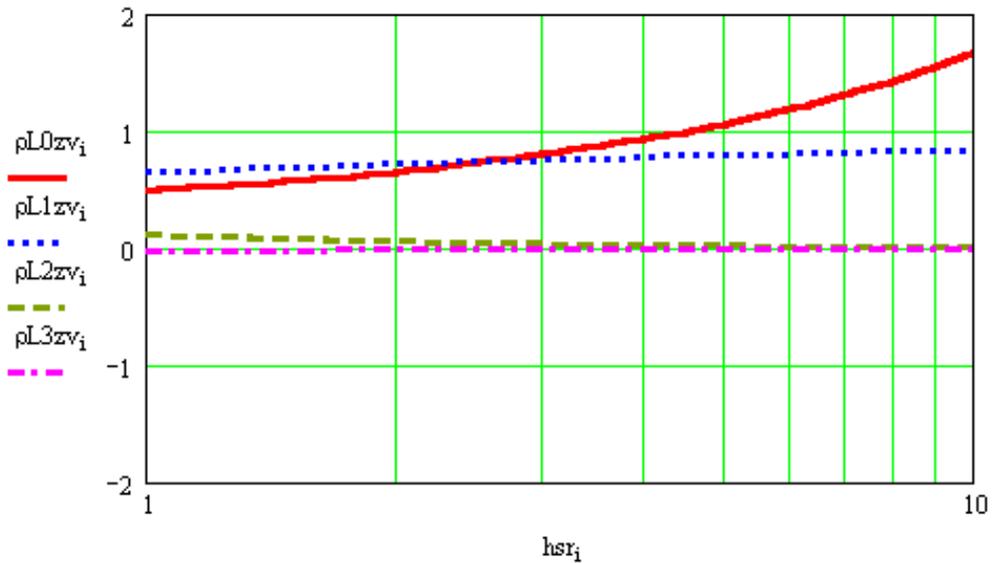


Fig. 6-1: Les coefficients ρ_{L0ZV} , ρ_{L1ZV} , ρ_{L2ZV} et ρ_{L3ZV} en fonction de la hauteur normalisée h/r_E au-dessus du plan de masse.

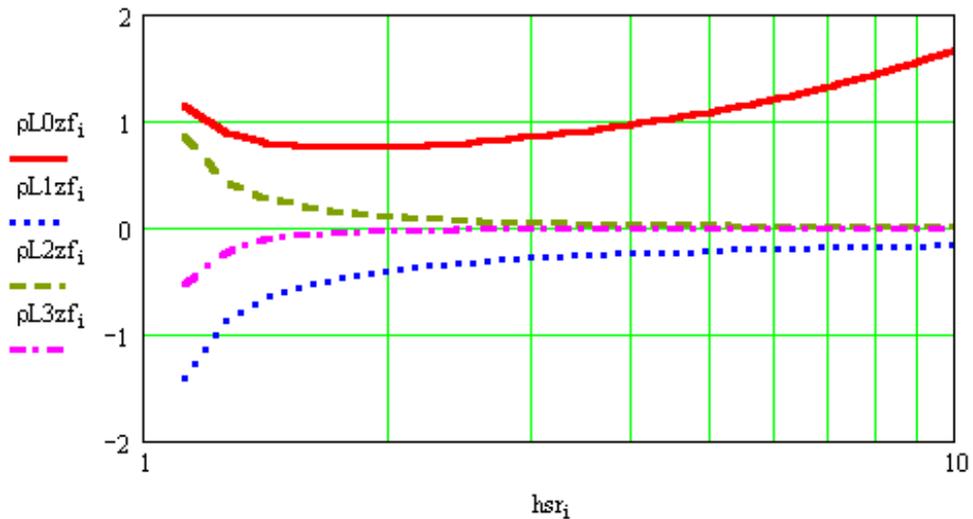


Fig. 6-2: Les coefficients ρ_{L0ZF} , ρ_{L1ZF} , ρ_{L2ZF} and ρ_{L3ZF} en fonction de la hauteur normalisée h/r_E au-dessus du plan de masse.

Il faut noter que, lorsque h/r_0 tend vers 1, il n'est pas possible de calculer précisément ρ_{L_nZF} de cette façon, car la convergence devient médiocre. Ceci est dû à ce que la capacité entre le cylindre conducteur et le plan de masse (cette capacité est proportionnelle à ρ_{L0ZF}) tend vers l'infini, la charge se concentrant au voisinage de $\theta = -\pi$. Il existe cependant une formule analytique bien connue pour la capacité entre deux cylindres conducteurs identiques [10, p. 192] à partir de laquelle ρ_{L0ZF} peut être calculé exactement pour toute valeur de h/r_0 :

$$\rho_{L0ZF} = \frac{h/r_E}{2 \arg \cosh(h/r_E)} \quad (6-16)$$

Il n'y a pas de problème de convergence dans le calcul de $\rho_{L n ZV}$. En $h/r_0 = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 2\rho_{L 0 ZV} &= 1,00000 \\
 2\rho_{L 1 ZV} &= 1,28987 \\
 2\rho_{L 2 ZV} &= 0,22849 \\
 2\rho_{L 3 ZV} &= -0,06114 \\
 2\rho_{L 4 ZV} &= 0,00956 \\
 2\rho_{L 5 ZV} &= 0,00278 \\
 2\rho_{L 6 ZV} &= -0,00364 \\
 2\rho_{L 7 ZV} &= 0,00219 \\
 \text{et pour } n \geq 8 & \quad |2\rho_{L n ZV}| \leq 0,001
 \end{aligned} \tag{6-17}$$

Ces valeurs ont été établies avec $M = 20$ et avec $M = 40$, sans changement de résultat pour les décimales apparaissant dans (6-17). Ces résultats peuvent être considérés comme exacts. Ils correspondent parfaitement à (1-22) établie au § 1.7.2 par une méthode approchée dans le seul cas du cylindre posé sur le plan de masse.

6.3 Amplitudes naturelles pour l'écran au-dessus d'un plan de masse

Pour traiter le problème de l'action de champ extérieur sur un écran généralisé de révolution, de rayon r_E , placé à une hauteur $h - r_E$ au dessus d'un plan de masse idéal, nous devons déterminer les excitations standards qui lui sont appliquées. En supposant r_E et $h - r_E$ petits devant les longueurs d'onde d'intérêt et la longueur ℓ du câble, la détermination de la tension V entre le cylindre et le plan de masse et celle du courant de mode commun i_{MC} constituent un problème classique de compatibilité électromagnétique, pouvant être traité [51, § 7.3] par la méthode des lignes de transmission. Nous supposons donc que, les champs appliqués et les impédances connectées entre l'écran généralisé et le plan de masse étant spécifiés, V et i_{MC} ont été calculés, en fonction de l'abscisse z le long de l'écran généralisé.

Au voisinage du point z , nous remplaçons alors l'écran généralisé par un cylindre de révolution de même rayon, parfaitement conducteur. Si le champ extérieur peut être localement considéré comme homogène entre le plan de masse et l'écran (ce sera le cas si les sources du champ extérieur sont suffisamment éloignées), nous pourrions utiliser les résultats du § 6.2. Pour $n = 0$, à partir de (6-14) et (6-15) nous obtenons :

$$\rho_{L0} = 4\pi \varepsilon_0 r_E \left(E_x \rho_{L0ZV} + \frac{V}{h} \rho_{L0ZF} \right) \quad (6-18)$$

où E_x est la projection du champ appliqué sur Ox. Pour $n \geq 1$, l'amplitude naturelle définie au § 4.8 vaut :

$$\frac{\rho_{Ln}}{4\pi \varepsilon_0 r_E^n} = \frac{1}{r_E^{n-1}} \left(E_x \rho_{LnZV} + \frac{V}{h} \rho_{LnZF} \right) \quad (6-19)$$

Dans le cas particulier où le champ extérieur est une onde TEM se propageant selon l'axe Oz, nous pouvons aussi déduire les i_{VA_n} de ces expressions, en exploitant la relation déjà utilisée pour passer de (1-22) à (1-25). Par exemple, dans le cas où l'écran généralisé est en contact avec le plan de masse, pour lequel $V = 0$, nous obtenons les amplitudes naturelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{L0} = 4\pi \varepsilon_0 r_0 E_0 \rho_{L0ZV} \\ \frac{\rho_{Ln}}{4\pi \varepsilon_0 r_E^n} = \frac{E_0 \rho_{LnZV}}{r_E^{n-1}} \\ i_{VA0} = \frac{4\pi}{\eta_0} r_0 E_0 \rho_{L0ZV} \\ \frac{i_{VA_n}}{4\pi r_E^n} = \frac{E_0 \rho_{LnZV}}{\eta_0 r_E^{n-1}} \end{array} \right. \quad (6-20)$$

Comme, avec nos hypothèses, ρ_{LnZV} et ρ_{LnZF} sont réels, les amplitudes hypercomplexes apparaissant dans (6-19) et (6-20) sont complexes.

6.4 Action de champs extérieurs sur un câble court posé sur le plan de masse

Reprenons le problème défini § 1.7.1, dans lequel un câble blindé est installé sur un plan métallique et est excité par une onde électromagnétique plane se propageant parallèlement à ce plan, avec le champ électrique E_0 normal au plan métallique et un champ magnétique $H_0 = E_0/\eta_0$ parallèle au plan métallique. Dans le cas de l'excitation longitudinale, l'onde électromagnétique plane se propage parallèlement au câble, et le champ magnétique est orthogonal à l'axe du câble. Dans le cas de l'excitation transversale, l'onde électromagnétique plane se propage orthogonalement au câble, et le champ magnétique est parallèle à l'axe du câble.

L'amplitude de la source de courant équivalente aux champs du conducteur α est ici

$$di_\alpha = \left\{ 2j\omega\pi\varepsilon_0 r_0 \zeta_{R\alpha} + 0,645 \text{Co}_j \left(e^{i\theta_c} Y_{PT\alpha} \right) \right\} E_0 dz \quad (6-21)$$

où θ_c est l'angle que fait l'origine des azimuts pour le câble avec la verticale. Cette formule s'applique à l'excitation longitudinale, comme à l'excitation transversale.

Dans le cas de l'excitation longitudinale, l'amplitude de la source de tension équivalente aux champs est donnée, pour le conducteur α , par :

$$dv_\alpha = \left\{ 2\pi r_0 Z_{T\alpha} + 0,645 \text{Co}_j \left(e^{i\theta_c} Z_{PT\alpha} \right) \right\} \frac{E_0}{\eta_0} dz \quad (6-22)$$

Dans le cas de l'excitation transversale, le champ axial appliqué est uniforme et peut donc être confondu avec l'amplitude naturelle de l'excitation standard. Nous obtenons donc une amplitude de la source de tension équivalente aux champs pour le conducteur α égale à :

$$d v_\alpha = Z_{AT\alpha} \frac{E_0}{\eta_0} dz \quad (6-23)$$

Nous notons que (6-21) et (6-22) sont les formes exactes de (1-23) et (1-26), tandis que (6-23) est identique à (1-24).

Intéressons-nous à présent à un câble électriquement court terminé. Cherchant les faibles tensions induites sur les conducteurs internes, nous pouvons négliger la diaphonie entre ces conducteurs internes. Sur le conducteur α , terminé à son extrémité A par une charge linéaire connectée à la masse, d'impédance $Z_{A\alpha}$, et à son extrémité B par une charge linéaire connectée à la masse, d'impédance $Z_{B\alpha}$, en utilisant (6-20), nous trouvons, dans le cas de l'excitation longitudinale, les tensions perturbatrices suivantes :

$$v_{A\alpha} = \frac{\ell H_0 Z_{A\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Z_{PT\alpha} \rangle + 2\pi r_E Z_{T\alpha} \right\} + \frac{\ell E_0 Z_{A\alpha} Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Y_{PT\alpha} \rangle + 2j\omega \varepsilon_0 \pi r_E \zeta_{R\alpha} \right\} \quad (6-24)$$

et

$$v_{B\alpha} = \frac{-\ell H_0 Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Z_{PT\alpha} \rangle + 2\pi r_E Z_{T\alpha} \right\} + \frac{\ell E_0 Z_{A\alpha} Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Y_{PT\alpha} \rangle + 2j\omega \varepsilon_0 \pi r_E \zeta_{R\alpha} \right\} \quad (6-25)$$

où $v_{A\alpha}$ et $v_{B\alpha}$ sont respectivement les tensions perturbatrices aux extrémités A et B , où ℓ est la longueur supposée électriquement courte du câble exposée aux champs, où $\langle Z_{PT\alpha} \rangle$ est la moyenne

de $Z_{PT\alpha}$ dans la direction du champ magnétique, où $\langle Y_{PT\alpha} \rangle$ est la moyenne de $Y_{PT\alpha}$ dans la direction du champ électrique. Plus précisément, nous avons :

$$\langle Y_{PT\alpha} \rangle = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \text{Co}_j \left(e^{i\theta_c} Y_{PT\alpha} \right) dz \quad (6-26)$$

$$\langle Z_{PT\alpha} \rangle = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \text{Co}_j \left(e^{i\theta_c} Z_{PT\alpha} \right) dz \quad (6-27)$$

Dans le cas de l'excitation transversale, sur le conducteur α , terminé comme précédemment, nous allons trouver les tensions perturbatrices suivantes :

$$v_{A\alpha} = \frac{\ell H_0 Z_{A\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} Z_{AT\alpha} + \frac{\ell E_0 Z_{A\alpha} Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Y_{PT\alpha} \rangle + 2j\omega \varepsilon_0 \pi r_E \zeta_{R\alpha} \right\} \quad (6-28)$$

et

$$v_{B\alpha} = \frac{-\ell H_0 Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} Z_{AT\alpha} + \frac{\ell E_0 Z_{A\alpha} Z_{B\alpha}}{(Z_{A\alpha} + Z_{B\alpha})} \left\{ 0,645 \langle Y_{PT\alpha} \rangle + 2j\omega \varepsilon_0 \pi r_E \zeta_{R\alpha} \right\} \quad (6-29)$$

où les mêmes notations que précédemment ont été utilisées.

Notons que le coefficient de $Z_{PT\alpha}$ dans (6-22), (6-24) et (6-25) a été calculé en supposant que la distribution de courant dans le câble et le plan de masse est la distribution de courant haute fréquence.

6.5 Emission par un câble court en espace libre

Abordons à présent un problème simple d'émission, que nous allons résoudre avec les expressions locales établies au § 5.7. Nous considérons un câble écranté de caractéristiques uniformes, de rayon r_E très petit devant sa longueur ℓ , elle-même électriquement courte aux fréquences pertinentes, muni de terminaisons de très petites dimensions, seul dans l'espace. Pour nous épargner d'avoir à prendre en compte des moyennes du type de (6-26) et (6-27), nous supposons aussi que Y_{PT} et Z_{PT} sont indépendants de z . Les terminaisons sont extérieurement des boîtes parfaitement conductrices et reliées à l'écran du câble par un contact périmétrique. Nous supposons que seul le conducteur α est excité par une source de tension de force électromotrice u par rapport à l'écran, dans la terminaison A, et que, dans la terminaison B, ce conducteur est connecté à une impédance $Z_{B\alpha}$ reliée à l'écran. Les autres conducteurs internes sont mis à la masse dans la terminaison A, et laissés en l'air dans la terminaison B.

Dans (5-30) et (5-31), nous notons que les dérivées par rapport à z sont négligeables le long du câble, mais présentent une singularité aux jonctions entre le câble et chacune des terminaisons.

En fonction de z , pour z entre 0 et ℓ , en notant $\delta(z)$ la distribution de Dirac, nous avons :

$$\mathbf{M}'_{S0} = u \left(\frac{Z_{T\alpha}}{R_{B\alpha}} + \zeta_{R\alpha} [\delta(z) - \delta(z - \ell)] \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{u Z_{AT\alpha}}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \mathbf{e}_z \quad (6-30)$$

$$\mathbf{M}'_{S1} = \left(\frac{u}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \text{Op}_i(Z_{PT\alpha}) - \frac{u}{j\omega 2\pi \epsilon_0 r_E} \text{Op}_i(Y_{PT\alpha} [\delta(z) - \delta(z - \ell)]) \right) \mathbf{e}_\theta - \frac{u}{j\omega 2\pi \epsilon_0 r_E^2} \text{Op}_i(\mathbf{i}Y_{PT\alpha}) \mathbf{e}_z \quad (6-31)$$

Par transformée de Fourier selon la variable z , nous obtenons des expressions fonctions de la variable h . La longueur ℓ étant électriquement courte, nous obtenons

$$\mathbf{M}'_{S0} = u e^{j\frac{h\ell}{2}} \text{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \left\{ \left(\frac{\ell Z_{T\alpha}}{R_{B\alpha}} - jh\ell \zeta_{R\alpha} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\ell Z_{AT\alpha}}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \mathbf{e}_z \right\} \quad (6-32)$$

$$\mathbf{M}'_{S1} = u e^{j\frac{h\ell}{2}} \text{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ell}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \text{Op}_i(Z_{PT\alpha}) \mathbf{e}_\theta \\ - \frac{\ell}{j\omega 2\pi \epsilon_0 r_E^2} \text{Op}_i(\mathbf{i}Y_{PT\alpha}) \mathbf{e}_z \end{array} \right\} \quad (6-33)$$

ces expressions étant en fait pratiquement indépendantes de h pour h entre $-\omega/c$ et $k = \omega/c$. Le terme contenant la singularité dans (6-31) a disparu de (6-33), car il donnait un terme de l'ordre de hr_E fois le second terme de (6-33), et a donc été considéré comme négligeable.

Dans cette géométrie particulièrement simple, nous n'avons à prendre en compte, pour $|h| < k$, que les ondes cylindriques se propageant depuis Oz, et, pour $|h| > k$, que les ondes évanescentes concentrant les champs au voisinage de l'axe. Les solutions $|h| = k$ ne doivent pas être utilisées, car, en espace libre, elles correspondent à une puissance infinie. En utilisant les conditions aux limites (6-32) et (6-33), et en ne retenant que les termes en ψ_n dans (3-66) à (3-71), les amplitudes hypercomplexes des champs sont faciles à déterminer. Pour $n=0$, c_0 et d_0 sont donnés par

$$\forall h \notin \{-k, k\}, \forall \omega \geq 0 \quad \begin{cases} (k^2 - h^2) c_0 \psi_0 = e^{j\frac{h\ell}{2}} \text{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \left(\frac{\ell Z_{T\alpha}}{R_{B\alpha}} - jh\ell \zeta_{R\alpha} \right) \\ j k \eta_0 d_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -e^{j\frac{h\ell}{2}} \text{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \frac{e \ell Z_{AT\alpha}}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \end{cases} \quad (6-34)$$

en $r = r_E$. Pour $n = 1$, c_1 et d_1 sont donnés $\forall h \notin \{-k, k\}$ et $\forall \omega \geq 0$ par :

$$\begin{cases} (k^2 - h^2)c_1\psi_1 = e^{j\frac{h\ell}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \frac{e\ell}{2\pi r_E R_{B\alpha}} \operatorname{Op}_i(Z_{PT\alpha}) \\ -\frac{j h}{r} c_1\psi_1 \mathbf{i} + j k \eta_0 d_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = e^{j\frac{h\ell}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{h\ell}{2}\right) \frac{e\ell}{j\omega 2\pi \epsilon_0 r_E^2} \operatorname{Op}_i(\mathbf{i}Y_{PT\alpha}) \end{cases} \quad (6-35)$$

en $r = r_E$.

Les expressions (6-34) et (6-35) permettent ensuite de calculer les champs dans tout l'espace, pour $r \geq r_E$. Il est remarquable que, en utilisant la solution générale des ondes cylindriques établie au § 3.8, les champs ont pu être calculés sans déterminer au préalable les courants électriques sur le cylindre conducteur se trouvant sous les courants magnétiques. Au contraire, ces courants pourraient être déterminés en utilisant (3-69) et (3-70).

6.6 Emission par la charge globale d'un câble court

Un des aspects intéressants de (5-30) et (5-31) est la manière dont y interviennent les termes $\zeta_{R\alpha}$ et $Y_{PT\alpha}$, par une dérivée. Comme ces termes ne jouaient aucun rôle important dans l'exemple précédent, nous allons considérer un cas très simple, où le premier apparaît seul.

Nous considérons un câble écranté de caractéristiques uniformes, de longueur ℓ électriquement courte aux fréquences pertinentes, orthogonal à un plan de masse idéal. A l'extrémité A (en $z = 0$), l'écran du câble est relié au plan de masse par un contact périmétrique, et le conducteur interne α est excité par une source de tension de force électromotrice u par rapport à la masse, les autres conducteurs internes étant mis à la masse. A l'extrémité B se trouve une terminaison qui est extérieurement une boîte parfaitement conductrice reliée à l'écran du câble par un contact périmétrique, dans laquelle tous les conducteurs internes sont laissés en l'air.

Le câble écranté est entouré d'un cylindre conducteur creux relié à la masse, par un fil. Nous cherchons à déterminer le courant i traversant ce fil, étant connue la capacité linéique C_1 entre le cylindre conducteur creux et l'écran du câble. Selon (5-30) et (5-31), nous avons

$$\mathbf{M}'_{S0} = e\zeta_{R\alpha} [\delta(0) - \delta(\ell)] \mathbf{e}_\theta \quad (6-36)$$

$$\mathbf{M}'_{S1} = -\frac{e}{j\omega 2\pi \epsilon_0 r_E} \left\{ \operatorname{Op}_i(Y_{PT\alpha} [\delta(0) - \delta(\ell)]) \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r_E} \operatorname{Op}_i(\mathbf{i}Y_{PT\alpha}) \mathbf{e}_z \right\} \quad (6-37)$$

Les courants magnétiques définis par (6-36) et (6-37) doivent être considérés au-dessus d'un bord parfaitement conducteur. Les termes de (6-37) produisent manifestement des courants dont les lignes de courant se referment sur l'écran. Il est donc clair que, pour le calcul du courant de déplacement injecté par le câble dans la capacité C_1 , seule peuvent intervenir les singularités de (6-36), qui sont équivalentes à des sources de tension en série avec l'écran du câble [7, § 3.1]. En fait il est ici clair que seule la singularité de (6-36) en $z = 0$, qui est équivalente à une source de tension intercalée entre le plan de masse et l'écran du câble, de force électromotrice $e \zeta_{R\alpha}$ jouera un rôle. Le courant i vaut donc

$$i = j\omega C_1 \ell e \zeta_{R\alpha} \quad (6-38)$$

ce qui était le résultat attendu, se déduisant directement de (5-10) par application du principe de réciprocité dans un circuit.

6.7 Conclusion

Nous avons résolu quelques problèmes simples illustrant la mise en oeuvre des paramètres caractérisant un câble pour les cinq principaux types de couplage.

Dans le problème d'action de champs extérieurs, traité au § 6.4, il est intéressant de noter que le champ incident est homogène, et que les termes correspondant à une période azimutale $2\pi / n$ pour $n \geq 2$ de l'excitation apparaissent du fait de l'interaction entre le câble et le plan de masse. Ceci se déduit des figures (6-1) et (6-2), où nous constatons que ces termes tendent rapidement vers zéro lorsque la distance entre le câble et le plan de masse augmente. Par conséquent, l'utilisation de cinq types de couplage, qui ne prend en compte que les composantes indépendantes de l'azimut et celles de période 2π , n'est qu'une approximation.

La méthode de résolution de ce problème de champs extérieurs [58] a été publiée en 2002, quoiqu'avec une erreur qui a été évitée dans notre exposé, grâce à l'approche rigoureuse et progressive du chapitre 5. Cependant, le résultat correct pour le câble posé sur le plan de masse avait été communiqué dès 1996 [49].

Les expressions locales concernant l'émission, utilisées dans les exemples du § 6.5 et du § 6.6 sont par contre tout à fait nouvelles, et méritent à ce titre d'être explorées en détail, avec prudence.

Chapitre 7 : Méthodes pour caractériser l'écrantage des câbles

7.1 Introduction

Ce chapitre décrit les méthodes utilisées pour mettre en évidence expérimentalement les cinq principaux types de couplage, localement. L'objectif étant de valider une théorie, il n'était pas utile de chercher à atteindre des fréquences plus élevées que 10 MHz. Ces méthodes de mesures seront utilisées au chapitre 8 pour caractériser les performances d'écrantage de câbles.

Il est à noter que plusieurs dispositifs spéciaux ont été créés pour ces mesures, dont deux ont fait l'objet de demandes de brevet français [37] [38]. En effet, avant le développement de ces méthodes de mesure, les techniques acceptées pour la caractérisation de l'écrantage des câbles concernaient uniquement [25] [27] [29] la mesure de l'impédance linéique de transfert Z_T et celle du coefficient de couplage électrique radial ζ_R (ou d'un paramètre équivalent).

7.2 Théorie élémentaire du banc triaxial

Rappelons en premier lieu quelques aspects connus de la caractérisation d'un câble coaxial. Comme indiqué au § 1.3, les paramètres recherchés sont l'impédance linéique de transfert Z_T et le coefficient de couplage électrique radial ζ_R . Le dispositif de mesure fondamental est le banc triaxial, représenté sur la figure 7-1, dans laquelle un câble sous test est excité par un générateur connecté entre l'écran du câble et un conducteur externe cylindrique entourant le câble. Le conducteur externe et l'écran du câble constituent les deux conducteurs de la *ligne d'excitation*. L'extrémité du dispositif à gauche de la fig. 7-1 s'appelle l'extrémité proche, celle qui est à droite étant par conséquent appelée extrémité éloignée.

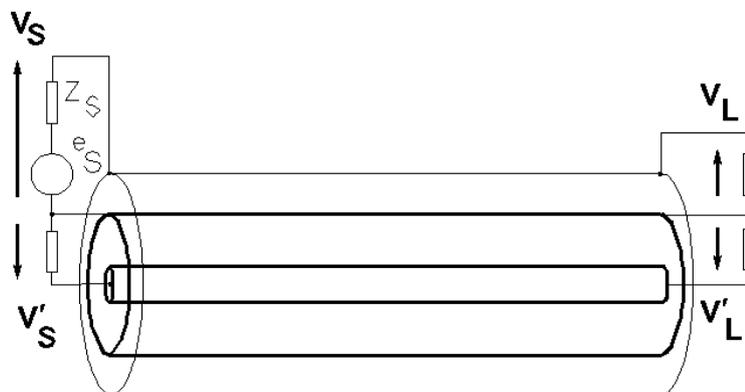


Fig. 7-1: câble coaxial (en gras) dans un banc triaxial.

Dans ce dispositif d'essai, à une fréquence donnée, nous noterons :

ℓ la longueur de la ligne d'excitation,

e_s la tension du générateur en circuit ouvert,

Z_s l'impédance interne du générateur,

Z_L l'impédance terminant la ligne d'excitation, du côté éloigné,

Z_C l'impédance caractéristique de la ligne d'excitation,

$\rho_s = (Z_s - Z_C)(Z_s + Z_C)^{-1}$ le coefficient de réflexion à l'extrémité proche de la ligne d'excitation,

$\rho_L = (Z_L - Z_C)(Z_L + Z_C)^{-1}$ le coefficient de réflexion à l'extrémité éloignée de la ligne d'excitation,

γ la constante de propagation de la ligne d'excitation,

Z'_s l'impédance terminant le câble sous test, du côté proche,

Z'_L l'impédance terminant le câble sous test, du côté éloigné,

Z'_C l'impédance caractéristique du câble sous test,

$\rho'_s = (Z'_s - Z'_C)(Z'_s + Z'_C)^{-1}$ le coefficient de réflexion à l'extrémité proche du câble sous test,

$\rho'_L = (Z'_L - Z'_C)(Z'_L + Z'_C)^{-1}$ le coefficient de réflexion à l'extrémité éloignée du câble sous test,

γ' la constante de propagation du câble sous test,

T la quantité $T = \exp(-\gamma \ell)$,

T' la quantité $T' = \exp(-\gamma' \ell)$.

La ligne d'excitation est en pratique une ligne avec des pertes diélectriques négligeables, dont la capacité linéique C_1 vaut donc :

$$C_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma}{j\omega Z_C} \right) \approx \frac{\gamma}{j\omega Z_C} \quad (7-1)$$

Cette capacité linéique étant connue, il est possible de passer du coefficient de couplage électrique radial du câble sous test à l'admittance linéique de transfert du câble sous test dans le dispositif d'essai, avec la relation (1-2).

En supposant que l'impédance linéique de transfert Z_T et l'admittance linéique de transfert Y_T sont homogènes le long de l'échantillon de câble sous test, nous pouvons établir des expressions compactes pour les tensions induites dans le câble sous test, à savoir la tension v'_s du côté proche, et la tension v'_L du côté éloigné [40] :

$$v'_s = \frac{e_s/2}{Z_C + Z_s} \frac{1}{1 - \rho_L \rho_s T^2} \frac{1}{1 - \rho'_L \rho'_s T'^2} \cdot \left\{ (Z_C Z'_C Y_T + Z_T) \frac{T' - T}{\gamma - \gamma'} (\rho_L T + \rho'_L T') + (Z_C Z'_C Y_T - Z_T) \frac{1 - TT'}{\gamma + \gamma'} (1 + \rho_L \rho'_L TT') \right\} \quad (7-2)$$

$$v'_L = \frac{e_s/2}{Z_C + Z_S} \frac{1}{1 - \rho_L \rho_S T^2} \frac{1}{1 - \rho'_L \rho'_S T'^2} \left\{ (Z_C Z'_C Y_T + Z_T) \frac{T' - T}{\gamma - \gamma'} (1 + \rho_L \rho'_S T T') + (Z_C Z'_C Y_T - Z_T) \frac{1 - T T'}{\gamma + \gamma'} (\rho_L T + \rho'_S T') \right\} \quad (7-3)$$

Les équations (7-2) et (7-3) permettent de comprendre toutes les méthodes de mesure basées sur le banc triaxial. Par exemple, en court-circuitant l'extrémité éloignée de la ligne d'excitation, soit avec $\rho_L = -1$, et en adaptant les deux extrémités du câble sous test, soit avec $\rho'_L = \rho'_S = 0$, nous obtenons, au premier ordre

$$v'_L \approx -v'_S \approx \frac{e_s \ell}{2Z_S} Z_T \quad (7-4)$$

dans le cas d'une ligne d'excitation électriquement courte. Ce résultat simple montre comment mesurer Z_T , et (7-2) et (7-3) permettent d'estimer plusieurs causes d'incertitude de mesure. Dans les mêmes conditions, mais cette fois-ci avec l'extrémité éloignée de la ligne d'excitation en circuit ouvert, soit avec $\rho_L = +1$, nous obtenons, toujours au premier ordre

$$v'_L \approx v'_S \approx \frac{e_s}{2} \ell Z'_C Y_T \quad (7-5)$$

Ce résultat fonde la méthode classique [25, § A5.3] de mesure de Y_T . Du fait que $Z_C Z'_C Y_T \ll Z_T$, on peut montrer [40] que, pour un câble tel que le RG58, et une longueur d'échantillon raisonnable (de l'ordre de 50 cm), (7-5) n'est pas une approximation satisfaisante, et que la méthode classique ne permet pas d'obtenir Y_T . Merewether et Ezell [16] étaient auparavant parvenus à une conclusion similaire pour des mesures effectuées dans le domaine temporel.

7.3 Mesure de Z_T avec le banc triaxial

Une cellule triaxiale a été conçue, qui a pu être utilisée pour les mesures d'impédance de transfert Z_T et de coefficient de couplage électrique radial ζ_R . La méthode de mesure appelée "reverse shield injection triaxial" par Tsaliiovitch [23] a été choisie, parce qu'elle convient pour obtenir des résultats à des fréquences inférieures ou égales à 10 MHz et qu'elle présente l'avantage de ne pas générer de problèmes de liaison de masse en basses fréquences.

La disposition de mesure est représentée sur le dessin de la figure 7-2. Le conducteur externe cylindrique (appelé "tube" sur le dessin) a une longueur de 500 mm et un diamètre interne de 22 mm.

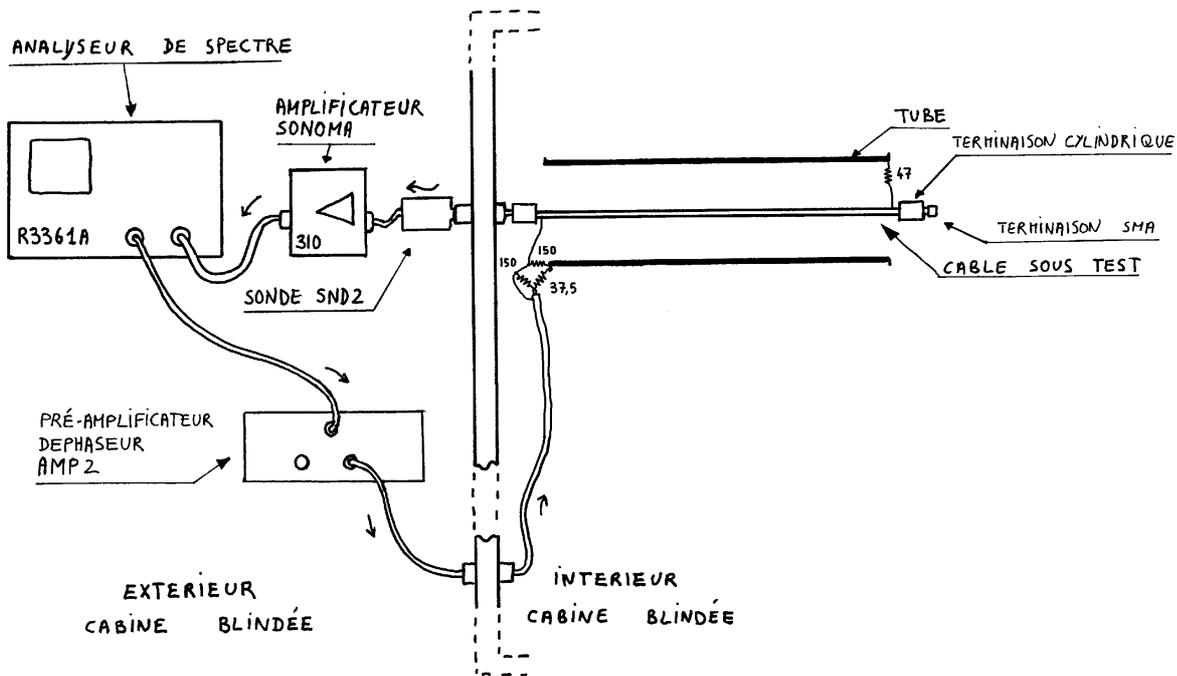


Fig. 7-2: principe des mesures de Z_T dans la bande 10 kHz à 10 MHz.

Nous avons utilisé une procédure expérimentale en double pesée, comportant une mesure de l'étalon décrit au § 7.8.1 et une mesure d'atténuation avec l'échantillon sous test. Nous notons que :

- les trois résistances connectées en un pi symétrique $150 \Omega/37,5 \Omega/150 \Omega$ entre le "tube" et le câble provenant du "pré-amplificateur déphaseur AMP2", forment un atténuateur 6 dB d'impédance caractéristique 50Ω , qui stabilise précisément à 50Ω l'impédance vue par la cellule de mesure,
- la ligne d'excitation est terminée par une résistance de 47Ω ,
- un atténuateur de 10 dB a été interposé entre "l'amplificateur Sonoma" et l'entrée de l'analyseur de spectre, uniquement pour la mesure de l'étalon,
- la terminaison SMA était typiquement un court-circuit (voir chapitre 8),
- les mesures n'ont pas été effectuées en cage de Faraday.

Les mesures ont donc été effectuées avec $\rho'_L = -1$ et $\rho'_S = 0$. Selon (7-2), aux fréquences suffisamment basses pour que la ligne soit électriquement courte, nous obtenons, au premier ordre,

$$v'_S \approx \frac{-e_s l Z_C}{Z_L + Z_S} \quad (7-6)$$

La valeur d'impédance de transfert de l'échantillon sous test se déduit de la valeur obtenue pour l'échantillon, par :

$$|Z_{T\alpha}| = \frac{\langle \text{mesure att\u00e9nuation} \rangle}{\langle \text{mesure \u00e9talon} \rangle} \frac{1,0\Omega}{\sqrt{10}} \quad (7-7)$$

o\u00f9 $\langle \text{mesure att\u00e9nuation} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure d'att\u00e9nuation avec l'\u00e9chantillon sous test, et o\u00f9 $\langle \text{mesure \u00e9talon} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de l'\u00e9talon.

Lors de la mesure de l'imp\u00e9dance lin\u00e9ique de transfert $Z_{T\alpha}$ sur le conducteur α , les autres conducteurs internes d'un c\u00e2ble multiconducteur \u00e9crant\u00e9 doivent \u00eatre laiss\u00e9s flottants \u00e0 au moins une de leurs extr\u00e9mit\u00e9s.

7.4 Mesure de ζ_R avec le banc triaxial

Comme indiqu\u00e9 \u00e0 la fin du \u00a7 7.2, les m\u00e9thodes de mesure bas\u00e9e sur (7-5) ne permettent pas de mesurer le coefficient de couplage \u00e9lectrique radial ζ_R des c\u00e2bles int\u00e9ressants. La raison de cet \u00e9chec est qu'elles reposent sur l'utilisation d'un dispositif de mesure \u00e0 basse imp\u00e9dance. La m\u00e9thode de mesure que nous allons d\u00e9crire, bas\u00e9e sur le principe montr\u00e9 sur la figure 7-3, \u00e9vite ce probl\u00e8me, mais elle demande une mesure d'att\u00e9nuation et trois mesures de r\u00e9f\u00e9rence.

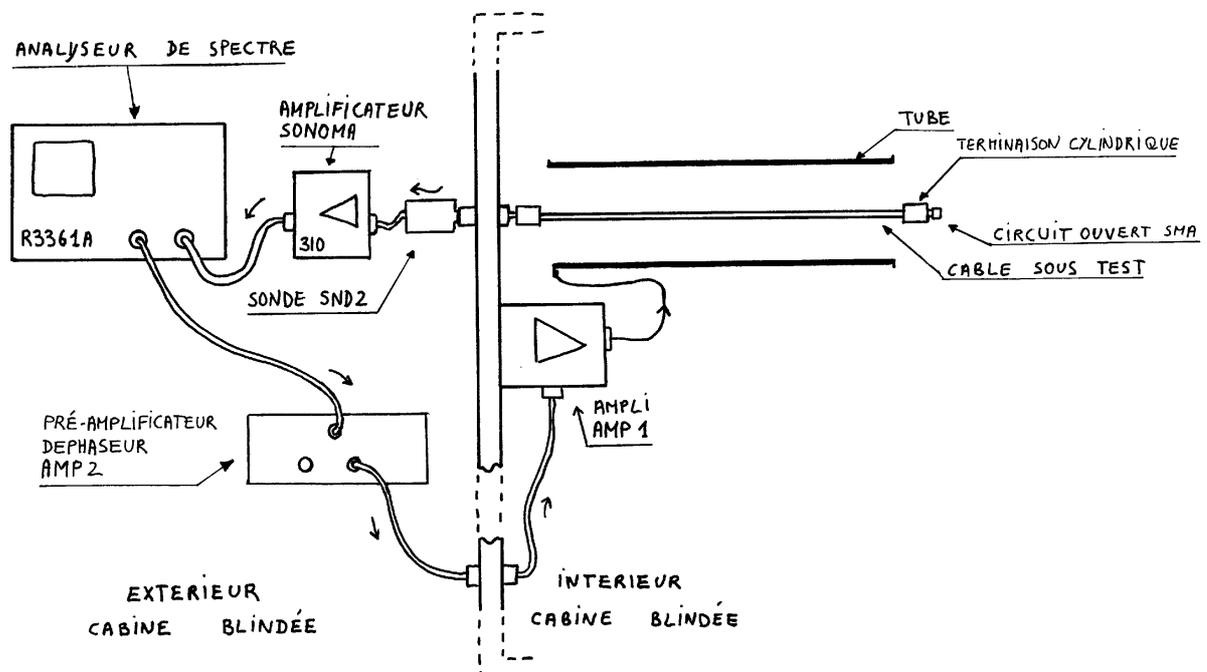


Fig. 7-3: principe des mesures de ζ_R dans la bande 10 kHz \u00e0 10 MHz.

Sur la figure 7-3, "l'ampli AMP1" est un amplificateur sp\u00e9cialement con\u00e7u pour cette exp\u00e9rience, capable de d\u00e9livrer 316 V efficaces, avec une imp\u00e9dance de sortie voisine de celle

d'une résistance de 51 kΩ en parallèle avec une capacité de 3 pF. La "sonde SND2" est également une réalisation spéciale, consistant en un amplificateur à haute impédance d'entrée en boîtier coaxial.

Pour cette configuration, selon (7-2) avec $\rho_L = \rho'_L = 1$, aux fréquences suffisamment basses pour que la ligne soit électriquement courte, nous obtenons, au premier ordre,

$$v'_S \approx \frac{e_S}{2} \ell (Z'_S + Z'_C) Y_T \quad (7-8)$$

Le montage utilisé pour la mesure d'atténuation est celui de la figure 7-3, avec deux modifications :

- un atténuateur de 10 dB est toujours placé à l'entrée de "l'amplificateur Sonoma" ;
- un atténuateur supplémentaire, dont la valeur *Att1* sera notée pour chaque mesure, est placé en sortie de la "sonde SND2".

Le montage utilisé pour la mesure de référence 1 est celui de la figure 7-3, avec trois modifications :

- la "double fiche N sans connexion de masse" est utilisée au niveau de la paroi ;
- le "circuit ouvert SMA" est remplacé par un court-circuit ;
- la "sonde SND2" n'est pas utilisée ;
- un atténuateur supplémentaire, dont la valeur *Att2* sera notée pour chaque mesure, est placé entre la "double fiche N sans connexion de masse" et l'atténuateur de 10 dB toujours présent à l'entrée de "l'amplificateur Sonoma".

Les conducteurs internes autres que les conducteurs α doivent être court-circuités à l'écran du câble, à au moins une de leurs extrémités. Seuls les échantillons répondant à ce critère ont été testés.

En notant $C_{2\alpha}$ la capacité linéique du conducteur interne α étudié, c'est-à-dire la somme de ses capacités avec tous les autres conducteurs du câble y compris l'écran, et ℓ la longueur du câble, nous trouvons que le coefficient de couplage électrique radial pour ce conducteur vaut :

$$\zeta_{R\alpha} = \frac{\left(\frac{v_{Sref}}{v'_{Sref}} - 1 \right)}{\left(\frac{v_{Satt}}{v'_{Satt\alpha}} - 1 \right)} \frac{Z_{ref}}{Z_{att}} \left(1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att} \right) \quad (7-9)$$

où

v_{Sref} est la tension délivrée à la cellule durant la mesure de référence 1,

v'_{Sref} est la tension mesurée sur l'écran du câble, lors de la mesure de référence 1,

v_{Satt} est la tension délivrée à la cellule durant la mesure d'atténuation,

$v'_{Satt\alpha}$ est la tension mesurée sur le conducteur interne α , lors de la mesure d'atténuation,

Z_{ref} est l'impédance connectée à la cellule pendant la mesure de référence 1,

Z_{att} est l'impédance connectée à la cellule pendant la mesure d'atténuation.

Dans notre cas, nous pouvons légitimement supposer que v_{Sref} est voisine de v_{Satt} , que v'_{Sref} est très petite devant v_{Sref} , et que v'_{Satt} est très petite devant v_{Satt} , ce qui conduit à :

$$\zeta_{R\alpha} \approx \frac{v'_{Satt\alpha}}{v'_{Sref}} \frac{Z_{ref}}{Z_{att}} \left(1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att}\right) \quad (7-10)$$

Nous notons bien que cette formule nécessite la connaissance d'un terme faisant intervenir le module et la phase de l'impédance d'entrée de la "sonde SND 2" utilisée. Comme Z_{ref} est voisin de 50Ω , nous obtenons :

$$|\zeta_{R\alpha}| \approx \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle}{\langle \text{mesure référence 1} \rangle} 50 \Omega \frac{Att1}{Att2} \left| \frac{1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att}}{g_{SND2} Z_{att}} \right| \quad (7-11)$$

où

$\langle \text{mesure atténuation} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure d'atténuation ;
 $\langle \text{mesure référence 1} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de référence 1 ;

g_{SND2} est le gain en tension du préamplificateur haute impédance.

La dernière fraction de (7-11), contenant les termes caractéristiques de la "sonde SND2", peut être déterminée par deux mesures supplémentaires. Ces mesures reposent sur l'utilisation d'une capacité de référence C_{ref} , installée dans un petit boîtier muni de deux connecteurs SMA. La valeur de cette capacité, déterminée par une mesure de l'affaiblissement d'insertion qu'elle occasionne entre deux atténuateurs de 10 dB, est de $C_{ref} \approx 2,60$ pF.

Au cours de la mesure de référence 2, le générateur de poursuite de l'analyseur de spectre est relié, par un atténuateur de 10 dB, à la capacité de référence, reliée à une extrémité de l'échantillon, l'autre extrémité de l'échantillon étant reliée à la sonde SND2, en cascade avec un atténuateur de valeur $Att3$, un câble, un atténuateur de 10 dB, l'amplificateur Sonoma et l'entrée de l'analyseur de spectre.

Au cours de la mesure de référence 3, le générateur de poursuite de l'analyseur de spectre est relié, par deux atténuateurs de 10 dB, à la cascade constituée par un câble, un atténuateur de 10 dB, l'amplificateur Sonoma et l'entrée de l'analyseur de spectre. Nous vérifions aisément que :

$$\left| \frac{1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att}}{g_{SND2} Z_{att}} \right| \approx \omega C_{ref} \frac{2 \langle \text{mesure reference 3} \rangle \sqrt{10}}{Att3 \langle \text{mesure reference 2} \rangle} \quad (7-12)$$

où $\langle \text{mesure reference 2} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de référence 2, et où $\langle \text{mesure reference 3} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de référence 3.

Finalement, le traitement des mesures se fera par la formule :

$$|\zeta_{R\alpha}| \approx \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle \langle \text{mesure reference 3} \rangle}{\langle \text{mesure reference 1} \rangle \langle \text{mesure reference 2} \rangle} 100 \Omega \omega C_{ref} \frac{Att1 \sqrt{10}}{Att2 Att3} \quad (7-13)$$

dans laquelle le terme (sans dimension) $100 \Omega \omega C_{ref}$ vaut $16,3 \cdot 10^{-6}$ soit $-95,7$ dB, à 10 kHz.

Nous notons que les formules (7-9) et (7-10) ci-dessus généralisent les expressions (8) et (9) de [40], qui ont été établies pour un câble coaxial, en négligeant l'influence de la capacité C_2 (ce qui est légitime à basse impédance), et en supposant $Z_{ref} = 2 \cdot Z_{att}$. A priori, le coefficient de couplage électrique radial ne doit que très peu dépendre de la fréquence.

7.5 Mesure de l'impédance de Z_{AT} avec la sonde à champ H axial

La sonde à champ H axial utilisée dans les mesures de Z_{AT} est montrée sur le dessin de la fig. 7-4. et sur la photographie de la fig. 7-9.

La sonde à champ H axial [38] comporte une structure en matière plastique (2) dans laquelle est inséré un câble sous test (8), un connecteur d'entrée (4) de type N femelle, un tore en ferrite (6), une bobine (5) de quelques spires à l'intérieur du tore et de même axe que celui-ci, et un manchon (7) permettant de centrer le câble par rapport à la bobine (5). La bobine (5) est un solénoïde susceptible, lorsqu'il est parcouru par le courant injecté dans le connecteur d'entrée (4), de créer un champ magnétique quasiment parallèle à l'axe du câble. Le circuit magnétique formé par le tore en ferrite (6) est destiné à canaliser le champ magnétique à l'extérieur du volume occupé par le câble sous test.

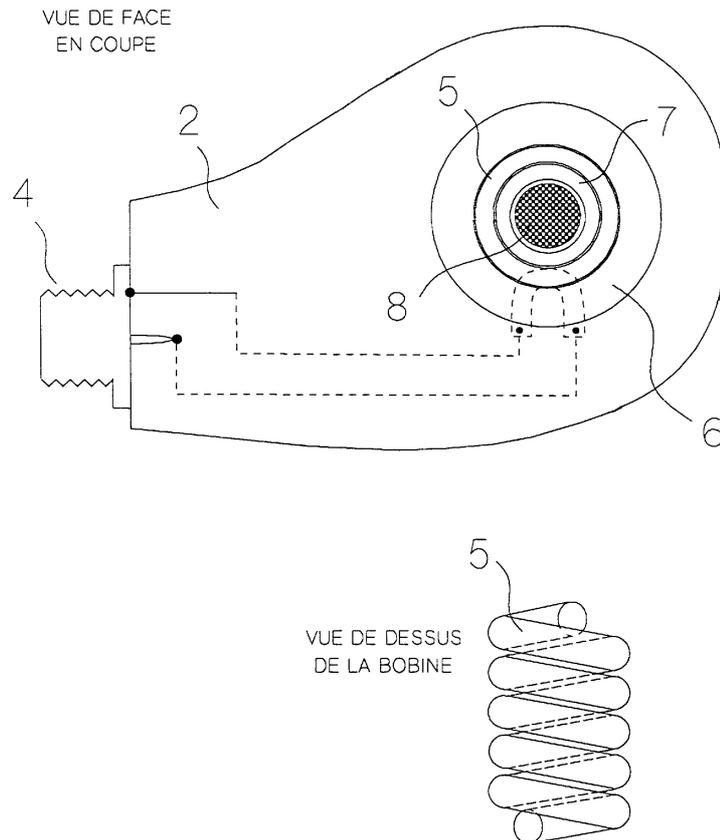


Fig. 7-4: la sonde à champ H axial.

L'étalonnage prévu permet de déterminer l'admittance de transfert de sonde Y_{sonde} . L'impédance de transfert axial $Z_{AT\alpha}$ du conducteur α considéré vaut alors :

$$Z_{AT\alpha} = \frac{v_{\alpha}}{Y_{sonde} e} \quad (7-14)$$

où

v_{α} est la tension mesurée sur le conducteur α ,

e est la tension délivrée par la source à la sonde, avec la convention des générateurs HF.

Le montage utilisé pour la mesure est celui de la figure 7-5, avec un amplificateur AMP2 pour “ampli”, et un atténuateur de 10 dB pour “atténuateur”. Les mesures d'atténuation sont celles effectuées avec un échantillon de câble sous test, et sont comparées à la mesure de l'étalon effectuée dans les mêmes conditions.

Les mesures sont donc traitées par la formule :

$$|Z_{AT\alpha}| = \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle}{\langle \text{mesure etalon} \rangle} |Z_{AT\text{etalon}}| \quad (7-15)$$

où $\langle \text{mesure atténuation} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure

d'atténuation, où $\langle \text{mesure etalon} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de l'étalon, et où la valeur de $Z_{AT\text{etalon}}$ est déterminée par (7-23) au § 7.8.2. Nous voyons qu'il n'est pas ici nécessaire de déterminer explicitement l'admittance de transfert de sonde Y_{sonde} .

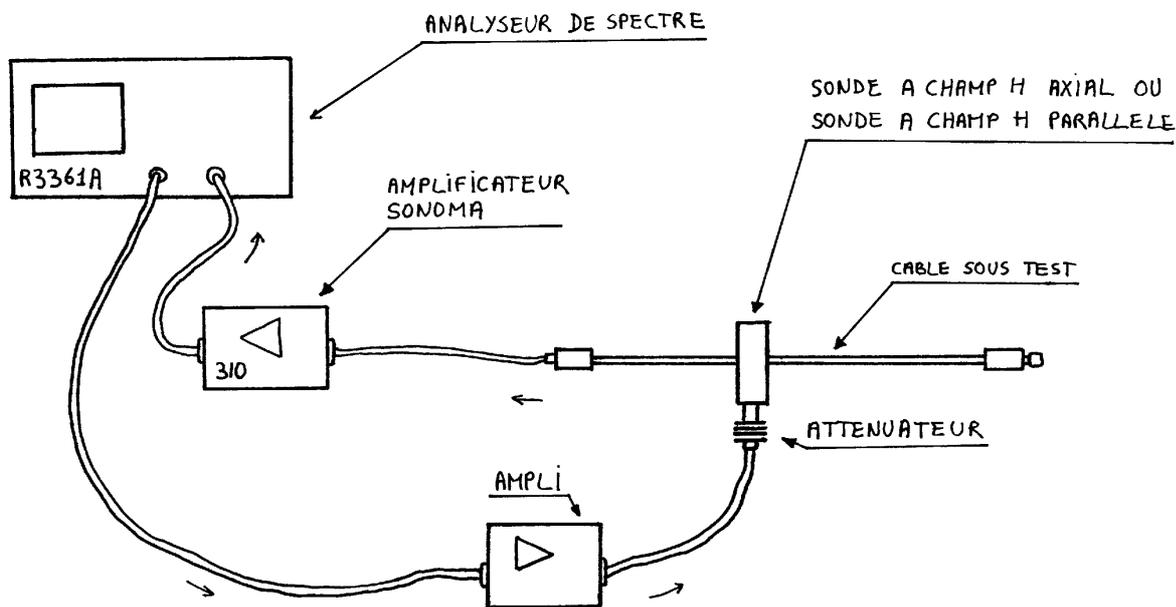


Fig. 7-5: principe des mesures de Z_{AT} et de Z_{PT} dans la bande 10 kHz à 10 MHz.

Nous notons que lors de la mesure de l'impédance de transfert axial $Z_{AT\alpha}$ sur le conducteur α , les autres conducteurs doivent être laissés flottants à au moins une de leurs extrémités. Nous notons aussi que la méthode suppose que le champ appliqué n'est pas influencé par la présence du câble dans la sonde, c'est-à-dire que le courant dans la bobine de la sonde ne doit pas changer de façon appréciable lors de l'introduction du câble à mesurer. Comme nous avons utilisé une sonde passive, nous aurions pu contrôler ceci en mesurant l'évolution de l'impédance de la pince, mais cette vérification n'a pas été faite.

7.6 Mesure de Y_{AT} avec la sonde à champ E parallèle

L'admittance de transfert parallèle Y_{PT} est uniquement une caractéristique du câble, tout comme ζ_R , mais contrairement à Y_T . La mesure de Y_{PT} doit être faite avec les conducteurs non utilisés mis à la masse à au moins une de leurs extrémités. A priori, l'admittance de transfert parallèle est fonction de l'angle que forme le champ électrique orthogonal à l'axe du câble avec une direction arbitraire orthogonale au câble. Nous ne pourrions donc mesurer que des valeurs moyennées sur la longueur de la pince d'injection, avec une pondération dépendant de la distribution du champ, valeurs que nous noterons $\langle Y_{P\alpha} \rangle$. Par contre, cette quantité doit ne dépendre que très peu de la fréquence.

La mesure de l'admittance de transfert parallèle a été faite en insérant le câble sous test à l'intérieur de la sonde à champ E parallèle représentée sur le dessin de la figure 7-6.

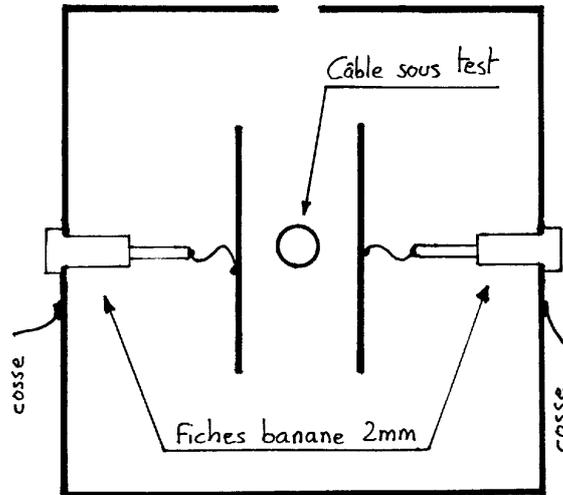


Fig. 7-6: la sonde à champ E parallèle.

Cette sonde à champ E parallèle consiste principalement en deux plaques parallèles attaquées par un amplificateur à sorties symétriques (les plaques sont alimentées en opposition de phase). Nous avons ainsi réalisé une mesure dite mesure d'atténuation, selon le schéma de la figure 7-7, avec la seule modification qu'un atténuateur 10 dB a été inséré entre la "sonde SND2" et "l'amplificateur Sonoma".

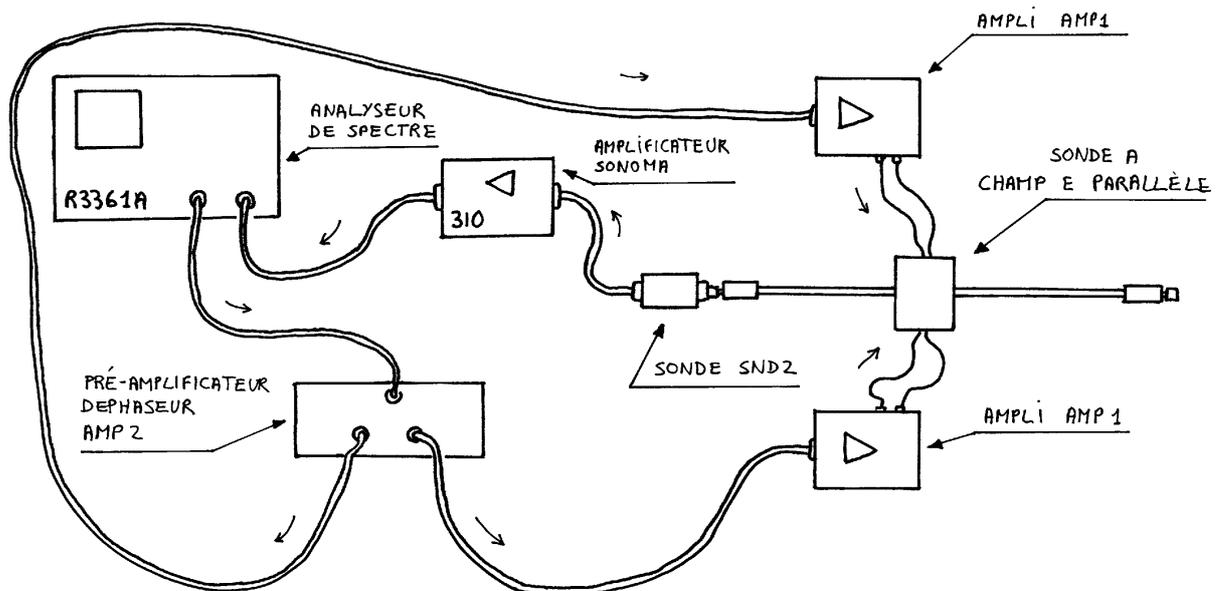


Fig. 7-7: principe de la mesure de Y_{PT} .

L'analyse de cette configuration nous permet d'établir que la tension en sortie de la sonde SND2 est :

$$v_{\alpha} = \frac{g_{SND2} Z_{att}}{1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att}} \langle Y_{PT\alpha} \rangle \int_{sonde} E_{\perp} dx \quad (7-16)$$

où les notations du § 7.4 ont été utilisées, où $\langle Y_{PT\alpha} \rangle$ désigne la moyenne de $Y_{PT\alpha}$ pondérée par l'intensité du champ orthogonal dans la sonde, et où E_{\perp} est le champ électrique parallèle à un plan orthogonal au câble, produit par la sonde à champ E parallèle.

Une mesure de l'étalon défini au § 7.8.3 est effectuée dans les mêmes conditions, et permet une détermination de la valeur donnée par (7-25). Nous obtenons donc :

$$\langle Y_{PT\alpha} \rangle \approx \left| \frac{1 + j\omega C_{2\alpha} Z_{att}}{Z_{att}} \right| \omega \varepsilon_0 b |Z_{Tr}| \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle}{\langle \text{mesure etalon} \rangle} \quad (7-17)$$

où

$\langle \text{mesure atténuation} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure d'atténuation ;

$\langle \text{mesure etalon} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de l'étalon.

Nous avons mesuré le gain de la sonde SND2, ce qui nous permet de réutiliser les mesures effectuées pour le couplage de type 2, et d'écrire :

$$\left| \frac{1 + j\omega C_{2\alpha} \ell Z_{att}}{Z_{att}} \right| \approx \omega C_{ref} \frac{2 \langle \text{mesure reference 3} \rangle \sqrt{10}}{Att3 \langle \text{mesure reference 2} \rangle} \langle \text{gain SND2} \rangle \quad (7-18)$$

où

$\langle \text{mesure reference 2} \rangle$ est le même résultat que pour le couplage de type 2 ;

$\langle \text{mesure reference 3} \rangle$ est le même résultat que pour le couplage de type 2 ;

$Att3$ est la même donnée que pour le couplage de type 2 ;

$\langle \text{gain SND2} \rangle$ est le gain mesuré de la sonde SND2.

Pour déterminer Z_{Tr} , nous avons effectué deux mesures de référence supplémentaires. Dans la mesure de référence 4, la sortie du générateur de poursuite de l'analyseur de spectre est reliée à la capacité de référence, dont la sortie est reliée par des fils aux deux plaques de la partie collectrice de l'étalon YPT, relié en cascade à la sonde SND2, à un atténuateur de 10 dB, à l'amplificateur Sonoma et à l'entrée de l'analyseur de spectre. Dans la mesure de référence 5, la sortie du générateur de poursuite de l'analyseur de spectre est reliée à travers un atténuateur de 40 dB à la capacité de référence, dont la sortie est reliée en cascade à la sonde SND2, à un atténuateur de 10 dB, à l'amplificateur Sonoma et à l'entrée de l'analyseur de spectre. Nous vérifions aisément que

$$|Z_{Tr}| \approx \frac{\langle \text{mesure reference 4} \rangle}{100 \langle \text{mesure reference 5} \rangle \omega C_{ref}} \quad (7-19)$$

d'où

$$\langle Y_{PT\alpha} \rangle \approx \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle}{\langle \text{mesure reference 2} \rangle \text{Att}3} \times \langle \text{gain SND2} \rangle \frac{\langle \text{mesure reference 3} \rangle \langle \text{mesure reference 4} \rangle}{\langle \text{mesure etalon} \rangle \langle \text{mesure reference 5} \rangle} \frac{2\omega \epsilon_0 b \sqrt{10}}{100} \quad (7-20)$$

où la première fraction contient tous les termes dépendant de l'échantillon, et où le terme $2\omega \epsilon_0 b$ vaut 8,90 nS soit -161,0 dB(S), à 10 kHz.

7.7 Mesure de Z_{PT} avec la sonde à champ H parallèle

La sonde à champ H parallèle utilisée dans les mesures de Z_{PT} est montrée sur le dessin de la fig. 7-8. et sur la photographie de la fig. 7-9.

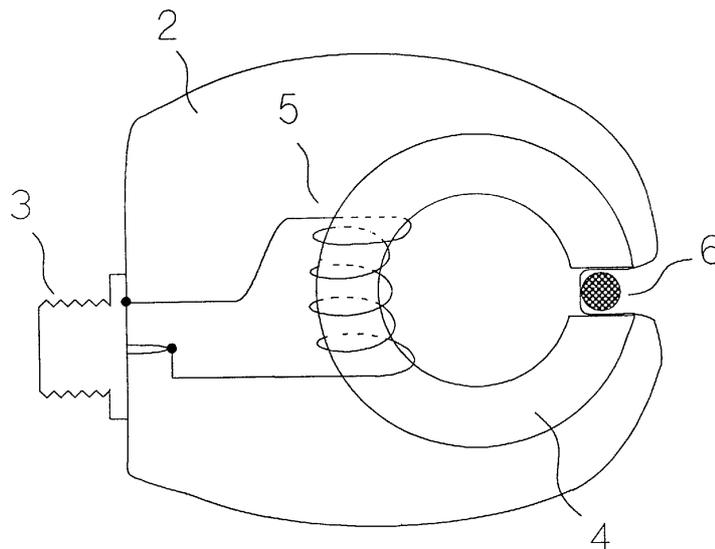


Fig. 7-8: la sonde à champ H parallèle.

La sonde à champ H parallèle comporte une structure en matière plastique (2) prévue pour que l'on y insère un câble sous test (6), un connecteur d'entrée (3) de type N femelle, un tore en ferrite fendu (4), et un bobinage (5) de quelques spires autour du tore. La calibration du système peut être effectuée avec l'étalon décrit au § 7.8.4, pour la position que prend un câble sous test lorsqu'il est inséré dans la structure en matière plastique au cours de mesures.

Cet étalon permet de déterminer l'admittance de transfert de sonde Y_{sonde} . A priori, l'impédance de transfert parallèle Z_{PT} est une fonction de l'angle que forme le champ orthogonal au câble avec une direction arbitraire orthogonale au câble. Nous ne pourrions donc mesurer, sur

un conducteur α , qu'une valeur moyennée sur la pince d'injection avec une pondération dépendant de la distribution du champ, valeur que l'on notera $\langle Z_{PT\alpha} \rangle$ et qui vaut :

$$\langle Z_{PT\alpha} \rangle = \frac{v_\alpha}{Y_{sonde} e} \quad (7-21)$$

où

v_α est la tension mesurée sur le conducteur α ,

e est la tension délivrée par la source à la pince, avec la convention des générateurs HF.

Le montage utilisé pour la mesure est celui de la figure 7-5, avec un amplificateur AMP2 pour “ampli”, et un atténuateur de 10 dB pour “atténuateur”. Les mesures d'atténuation sont celles effectuées avec un échantillon, et sont comparées à la mesure de l'étalon effectuée dans les mêmes conditions. Les mesures sont donc traitées par la formule :

$$\langle Z_{PT\alpha} \rangle = \frac{\langle \text{mesure atténuation} \rangle}{\langle \text{mesure etalon} \rangle} |Z_{PT\text{étalon}}| \quad (7-22)$$

où $\langle \text{mesure atténuation} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure d'atténuation, où $\langle \text{mesure etalon} \rangle$ est la tension lue sur l'analyseur de spectre lors de la mesure de l'étalon, et où la valeur de $Z_{PT\text{étalon}}$ est donnée par (7-26). Nous voyons qu'il n'est pas ici nécessaire de déterminer explicitement l'admittance de transfert de sonde Y_{sonde} .

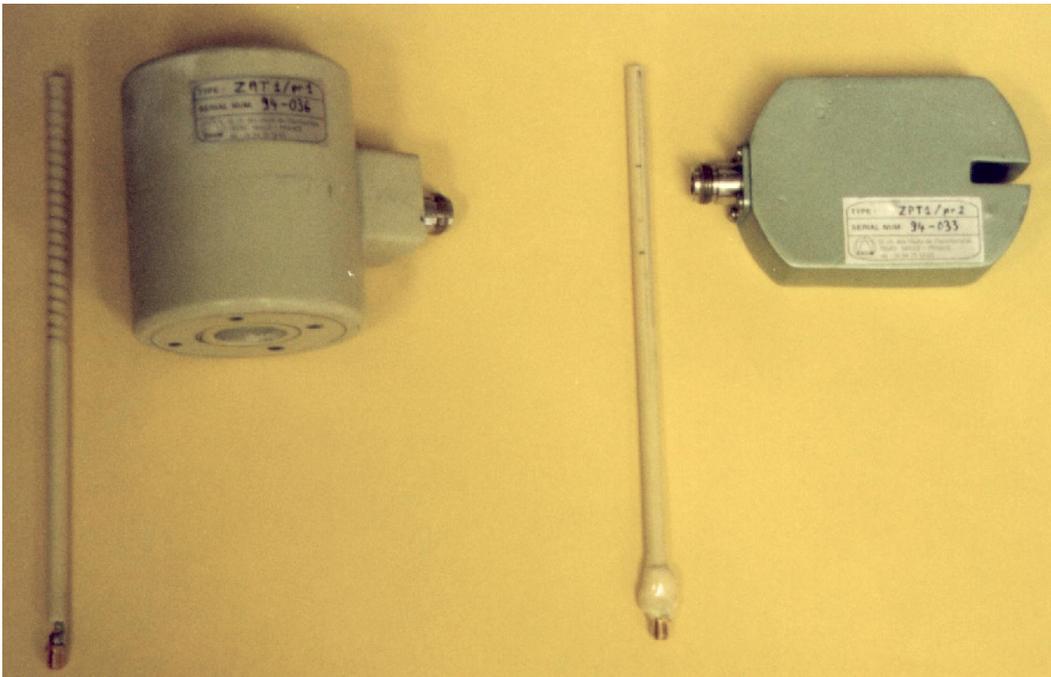


Fig. 7-9: la sonde à champ H axial avec son étalon (à gauche), et la sonde à champ H parallèle avec son étalon (à droite), fabriquées par Excem.

Nous notons que lors de la mesure de l'impédance de transfert parallèle $Z_{PT\alpha}$ sur le conducteur α , les autres conducteurs doivent être laissés flottants à au moins une de leurs extrémités. Nous notons aussi que la méthode suppose que le champ appliqué n'est pas influencé par la présence du câble dans la sonde, c'est-à-dire que le courant dans la bobine de la sonde ne doit pas changer de façon appréciable lors de l'introduction du câble à mesurer. Comme nous avons utilisé une sonde passive, nous aurions pu contrôler ceci en mesurant l'évolution de l'impédance de la pince, mais cette vérification n'a pas été faite.

7.8 Définition et utilisation des étalons

7.8.1 Définition de l'étalon ZT

Cet étalon se présente comme un tronçon de câble semi-rigide RG 402 de 60 cm de long, terminé par un connecteur SMA d'un côté et par un court-circuit de l'autre, l'écran de ce câble étant, en son centre, interrompu sur une longueur de 3 mm. Autour de cette fente sont installées entre les deux parties de l'écran, 4 résistances de $2,2\ \Omega$ en parallèle, séparées par un angle de 90° . L'impédance de transfert nominal de cet étalon est donc de $0,55\ \Omega$. Comme il est destiné à servir de référence pour des échantillons de longueur nominale 55 cm, il peut être considéré comme un étalon dont l'impédance linéique de transfert est $1,0\ \Omega$.

7.8.2 Définition de l'étalon ZAT

L'étalon ZAT qui permet l'étalonnage de la sonde à champ H axial a été réalisé selon le dessin de la figure 7-10. Il est visible sur la photographie de la figure 7-9.

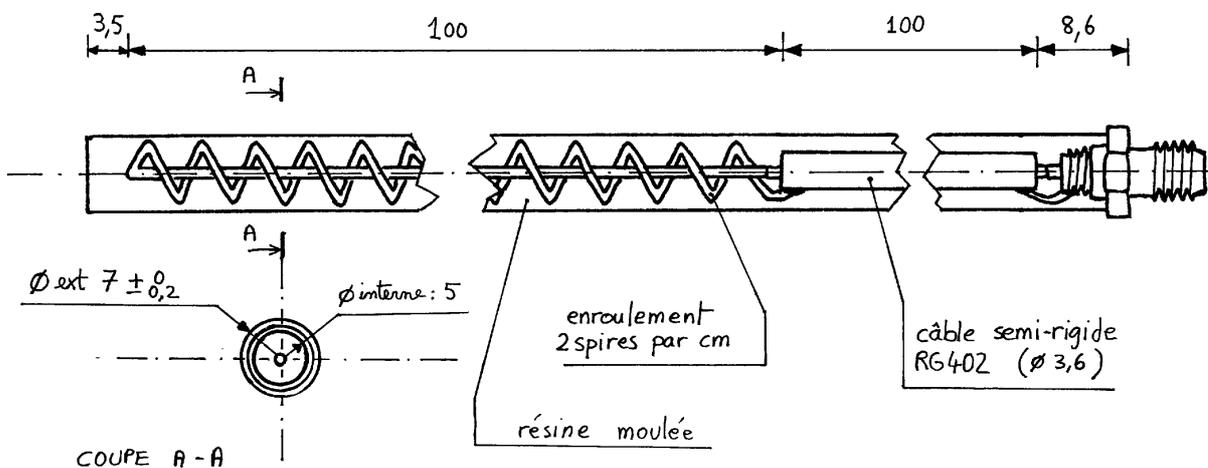


Fig. 7-10: dessin de l'étalon ZAT

L'enroulement est réalisé, avec du fil de diamètre 0,5 mm. L'étalon ZAT a une impédance de transfert axial valant :

$$Z_{AT\text{etalon}} = j\omega\mu_0 m_1 \pi r_1^2 \quad (7-23)$$

où m_1 est le nombre de spires par mètre, ici $m_1 = 200 \text{ m}^{-1}$;

r_1 est le rayon des spires, ici $r_1 = 2,5 \text{ mm}$.

Cette valeur néglige le flux du champ interne aux spires, et l'exclusion du champ dans le conducteur de retour : elle s'applique d'autant mieux que le fil est plus fin. Utilisée avec (7-14), elle permet de déduire Y_{sonde} du rapport entre la tension mesurée en sortie de l'étalon, et la dérivée de la tension e . La formule (7-23) donne, à 10 kHz, une impédance de transfert axial de $j0,310 \text{ m}\Omega$, soit $-70,17 \text{ dB}(\Omega)$.

La limite supérieure de fréquence à laquelle cette calibration sera valable dépendra de l'inductance de la sonde. Cette inductance L est aisément déterminée par la formule de Nagaoka corrigée par la méthode de Rosa [12, chap. 16]. En prenant en compte l'inductance du conducteur de retour, et en négligeant les inductances partielles mutuelles entre l'hélice et ce conducteur de retour, nous trouvons $L = 261 \text{ nH}$. Nous considérerons que la fréquence maximale d'utilisation de l'étalon ZAT est atteinte lorsque l'impédance correspondante vaut $j50 \Omega$, ce qui correspond à une erreur de 3 dB. La fréquence maximale d'utilisation est donc d'environ 30 MHz.

7.8.3 Définition de l'étalon YPT

L'étalon YPT a été réalisé avec une plaque de verre époxy de 1,6 mm d'épaisseur, de 8 mm de large par 100 mm de long, cuivrée sur ses deux faces, et connectée à une résistance de stabilisation d'impédance de 56Ω , et à une prise SMA à travers un transformateur à très faible capacité parasite entre le primaire et le secondaire. Chaque enroulement du transformateur comporte 15 spires sur un tore en matériau 3C85 avec $A_L = 880 \text{ nH}$.

L'antenne constituée par les deux pistes parallèles a une admittance de transfert parallèle théorique de :

$$Y_{PT\text{etalon}} \approx j\omega\epsilon_0 b \quad (7-24)$$

où b est la largeur de la partie collectrice de la sonde, $b = 8 \text{ mm}$.

Deux effets viennent limiter la bande passante utile de l'étalon YPT : la capacité de la partie collectrice de la sonde en parallèle avec 56Ω (cette capacité étant estimée à 24 pF , nous trouvons

une fréquence de coupure de 118 MHz) et les caractéristiques du transformateur. Ces dernières jouent un rôle prépondérant, puisque nous avons mesuré que son comportement est proche d'un transformateur idéal de rapport 1:1 dans la seule bande de fréquence 50 kHz à 5 MHz.

Dans cette bande de fréquence, le courant de déplacement recueilli par l'antenne constituée par les deux pistes parallèles, est transmis, à travers le transformateur qui élimine tout mode commun venant de l'antenne, à la sortie de l'étalon YPT. Cette sortie est connectée à l'entrée d'un amplificateur haute impédance. En sortie de cet amplificateur, nous recueillons une tension valant :

$$v_{etalon} = g_{SND2} Z_{Tr} j\omega\epsilon_0 b \int_{sonde} E_{\perp} dx \quad (7-25)$$

où v_{etalon} est la tension en sortie de l'amplificateur haute impédance, où g_{SND2} est le gain en tension du préamplificateur haute impédance, où Z_{Tr} est l'impédance de transfert entre le courant injecté par l'antenne et la tension de sortie de l'étalon, connecté à une haute impédance, et où E_{\perp} est la composante du champ appliqué normale à l'étalon.

7.8.4 Définition de l'étalon ZPT

L'étalon ZPT qui permet l'étalonnage de la sonde à champ H parallèle a été réalisé selon le dessin de la figure 7-11. Il est visible sur la photographie de la figure 7-9.

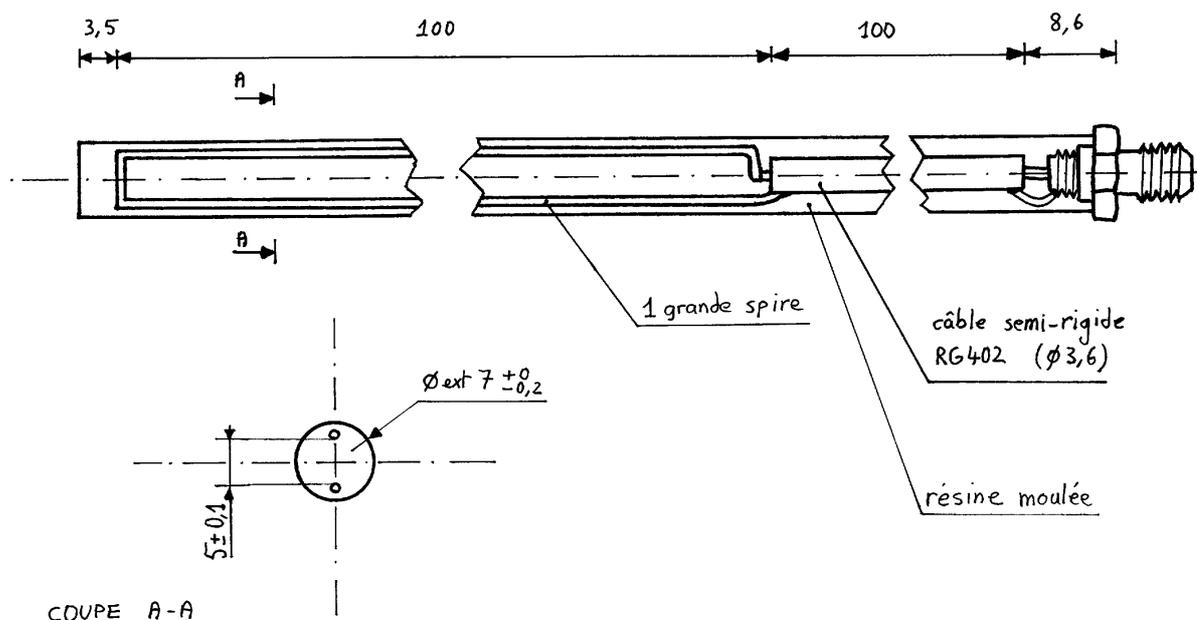


Fig. 7-11: dessin de l'étalon ZPT.

L'étalon ZPT a été réalisé avec du fil de diamètre 0,5 mm. En notant Δ_1 l'espacement des fils de la spire (ici $\Delta_1 = 5$ mm), nous voyons que l'impédance de transfert de l'étalon ZPT vaut :

$$Z_{PT\text{ etalon}} = j\omega \mu_0 \Delta_1 \quad (7-26)$$

Cette valeur néglige le flux du champ interne à la spire : elle s'applique d'autant mieux que le fil est plus fin. Utilisée avec (7-21), elle permet de déduire Y_{sonde} du rapport entre la tension mesurée en sortie de l'étalon, et la dérivée de la tension e . La formule (7-26) donne, à 10 kHz, une impédance de transfert parallèle de $j394,8 \mu\Omega$, soit $-68,07 \text{ dB}(\Omega)$.

La limite supérieure de fréquence à laquelle cette calibration sera valable dépendra de l'inductance de la sonde. Cette inductance L est celle d'une ligne bifilaire et vaut $L = 128 \text{ nH}$. Nous considérerons que la fréquence maximale d'utilisation de l'étalon est atteinte lorsque l'impédance correspondante vaut $j50 \Omega$, ce qui correspond à une erreur de 3 dB. La fréquence maximale d'utilisation est donc d'environ 62 MHz.

7.9 Conclusion

La méthode de mesure décrite pour l'impédance transfert Z_T n'est pas particulièrement originale, si ce n'est qu'elle fait systématiquement usage d'un étalon. La méthode de mesure décrite pour le coefficient de couplage électrique radial ζ_R permet de mesurer des couplages extrêmement faibles, en évitant les limitations de l'approche classique, indiquées à la fin du § 7.2. Les méthodes de mesures définies pour Z_{AT} , Y_{PT} et Z_{PT} sont des méthodes locales, pour lesquelles les champs extérieurs sont appliqués sur quelques centimètres seulement de câble.

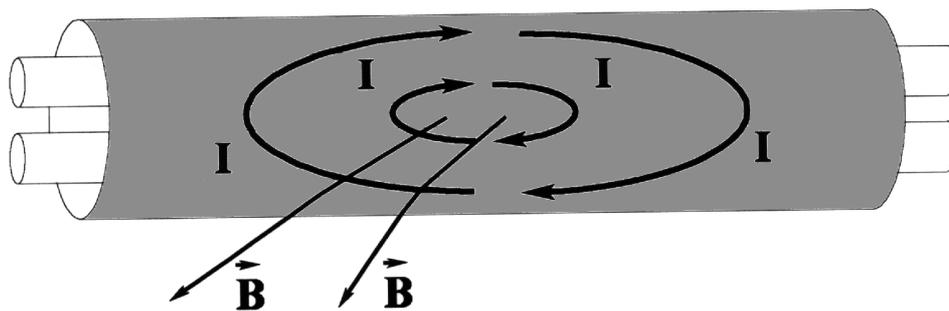


Fig. 7-12 : courants produits par la pince à champ H parallèle

Ceci a inévitablement pour conséquence que les effets de bords sont importants, comme le montrent par exemple les courants représentés sur la fig. 7-12 correspondant à ceux que doit produire la sonde à champ H parallèle, qui sont sensiblement différents de ceux de la fig. 1-7. D'autre part, pour les mesures de Y_{PT} et Z_{PT} , nous notons que les sondes ne sont pas strictement équivalentes aux méthodes définies à la fin du § 4.5.

Chapitre 8 : Résultats expérimentaux

8.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description et à la discussion d'une partie de nos résultats expérimentaux, qui ont été obtenus avec les échantillons de câble décrits plus bas, au § 8.2. Ces résultats concernent :

- d'une part la détermination des paramètres caractérisant localement ces échantillons pour les cinq principaux types de couplage,
- d'autre part une validation par illumination globale en cellule TEM, selon les situations traitées dans les calculs du § 1.7 et du § 6.4

L'objet de ces essais était d'obtenir des données sur le comportement des échantillons dans la bande de fréquence 100 kHz à 10 MHz, dans le but de déterminer si la prise en compte de couplages autres que le couplage de type 1 était en fait utile. Quelques résultats, très partiels, de ces essais ont déjà été publiés [41] [43] [45] [46] [47]. Nous allons ici présenter davantage de résultats, et les discuter en détail.

8.2 Définition des échantillons

Nous avons réalisé et étudié 16 échantillons. Les résultats expérimentaux complets [42] [44] étant très volumineux, nous nous limiterons à 6 échantillons, qui présentent des caractéristiques suffisantes pour notre propos.

Ces échantillons ont été réalisés à partir de trois types de câble : du KX15, aussi appelé RG-58 C/U, du RG-223U, et du câble Fileca F 6113-19. Le câble KX15 est un câble coaxial normalisé de diamètre total voisin de 4,9 mm, avec écran à simple tresse, d'impédance caractéristique nominale 50Ω , et de capacité interne voisine de 93,5 pF/m. Le câble RG-223 est un câble coaxial normalisé de diamètre total voisin de 5,5 mm, avec écran à double tresse, d'impédance caractéristique nominale 50Ω , et de capacité interne voisine de 93,5 pF/m. Le câble Fileca F 6113-19 est un câble multiconducteur blindé avec simple tresse, comportant 6 fils internes disposés autour d'une âme en élastomère souple, de diamètre total voisin de 5,7 mm. Les

Les fils internes sont disposés sur un cercle, selon la séquence noir, gris, vert, jaune, bleu, rouge, les conducteurs de ces fils étant centrés sur un cercle de diamètre 3,3 mm environ. Le pas du torsadage des fils internes est de 73 mm environ.

Les échantillons sont tous conformes au dessin de la figure 8-1 : une section de câble est terminée par deux terminaisons cylindriques A et B, auxquelles l'écran du câble est raccordé par un contact périmétrique, et à l'intérieur de chacune desquelles les conducteurs internes du câble sont raccordés selon la spécification individuelle de chaque échantillon.

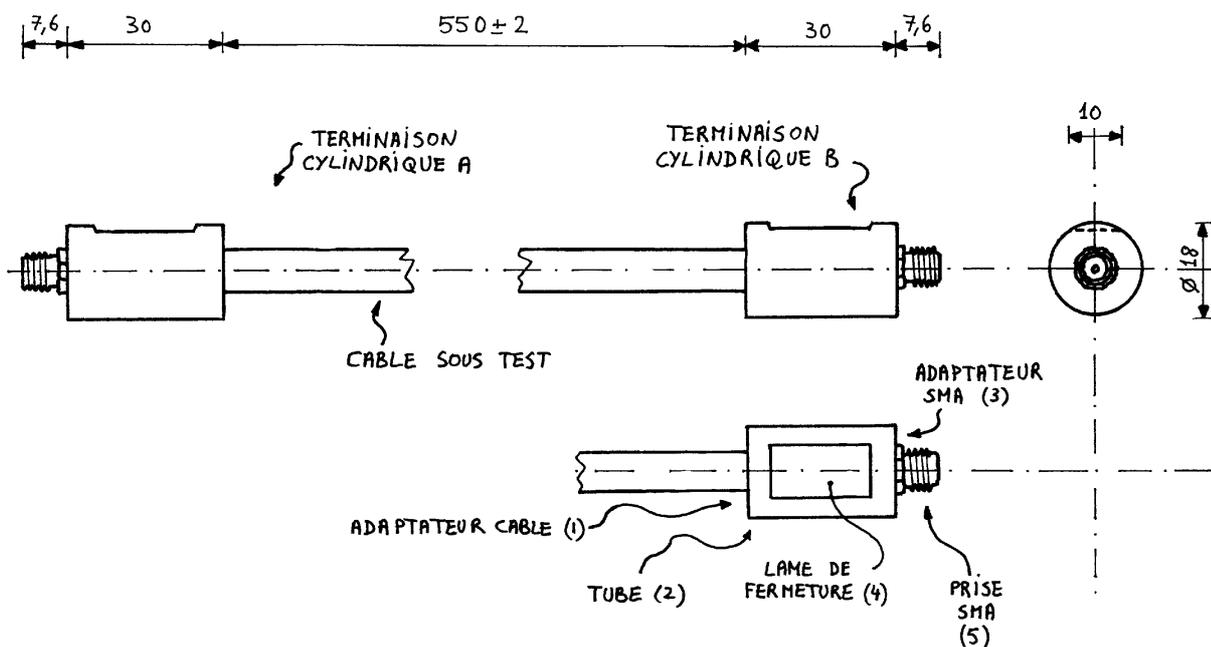


Fig. 8-1: dessin d'un échantillon.

La définition des 6 échantillons pertinents est la suivante:

Échantillon 1 : Câble KX15 (RG-58 C/U), le conducteur interne étant relié à chacune de ses extrémités au connecteur SMA de la terminaison.

Échantillon 2 : Câble RG-223 U, le conducteur interne étant relié à chacune de ses extrémités au connecteur SMA de la terminaison cylindrique.

Échantillon 6 : Câble 6 conducteurs écranté Fileca F 6113-19, le conducteur jaune étant relié à chacune de ses extrémités au connecteur SMA de la terminaison cylindrique, les autres conducteurs étant mis à la masse aux deux extrémités.

Échantillon 9 : Câble 6 conducteurs écranté Fileca F 6113-19, tous les conducteurs internes étant reliés à chaque extrémité au connecteur SMA de la terminaison cylindrique.

Échantillon 10 : Câble 6 conducteurs écranté Fileca F 6113-19, les conducteurs noir et jaune étant reliés ensemble au connecteur SMA de la terminaison cylindrique B, le conducteur noir étant mis à la masse sur la terminaison cylindrique A, le conducteur jaune étant relié au connecteur SMA de cette même terminaison, et les autres conducteurs étant en l'air de part et d'autre de l'échantillon.

Échantillon 14 : Câble réalisé en insérant les 6 conducteurs internes d'un câble Fileca F 6113-19, avec le film plastique et sans déformer la torsade, dans un tube rond en laiton demi-dur de diamètre intérieur 5 mm et d'épaisseur 0,5 mm, avec deux fentes longitudinales de 20 cm de long à 180° l'une de l'autre, en son centre, les conducteurs noir et rouge étant reliés ensemble au connecteur SMA de la terminaison cylindrique B, le conducteur noir étant mis à la masse sur la terminaison cylindrique A, le conducteur rouge étant relié au connecteur SMA de cette même terminaison, et les autres conducteurs étant en l'air de part et d'autre de l'échantillon.

Les échantillons 10 et 14 ne peuvent être exploités que lors des mesures concernant les couplages de type 1, 3 et 5. Ils s'utilisent toujours avec un circuit ouvert SMA du côté non connecté aux instruments de mesure. Lorsque la mesure est effectuée du côté B, le paramètre correspondant au conducteur noir est mesuré. Lorsque la mesure est effectuée du côté A, le paramètre mesuré est la différence entre le paramètre pour l'autre conducteur interne utilisé, et le paramètre pour le conducteur noir : il s'agit donc, en première approximation, d'un paramètre de mode différentiel.

8.3 Mesures pour la caractérisation des échantillons

8.3.1 Méthodes de mesure et remarques générales

Les méthodes de mesure utilisées ont été décrites aux § 7.3 à § 7.7. Du fait de l'utilisation d'un analyseur de spectre avec générateur de poursuite (au lieu d'un analyseur de réseau), la partie basses fréquences du spectre est influencée par le bruit phase et par la réjection de la raie à 0 Hz. Nous pouvons considérer que ce phénomène est négligeable au-delà de 70 kHz. Les mesures présentées entre 10 kHz et 10 MHz ont été effectuées avec un seul balayage logarithmique, dans une bande passante de résolution de 1 kHz. Les mesures présentées

entre 100 kHz et 100 MHz ont aussi été effectuées avec un seul balayage logarithmique, cette fois-ci avec une bande passante de résolution de 10 kHz. Les mesures présentées sur l'intervalle 10 kHz à 100 MHz ont été effectuées en concaténant deux mesures effectuées comme précédemment (et effectuées successivement), le raccord étant opéré à la fréquence de 1 MHz : une discontinuité est donc parfois visible à cette fréquence.

8.3.2 Mesures pour le couplage de type 1

Ces mesures n'appellent pas de remarque particulière. En dépit de l'absence de cage de Faraday, il n'y a pas d'effet de main appréciable aux fréquences inférieures à 10 MHz. Nos résultats sont tout à fait précis dans l'intervalle spectral 70 kHz à 20 MHz. Sauf pour les impédances linéiques de transfert inférieures à $-55 \text{ dB}(\Omega/\text{m})$, aucun raccord n'est visible à la fréquence de 1 MHz : lorsque le niveau mesuré est faible, le changement de bande passante produit une modification d'amplitude du bruit non négligeable.

Les résultats de mesure après traitement, donnant l'impédance linéique de transfert Z_T exprimée en $\text{dB}(\Omega/\text{m})$, apparaissent dans les figures indiquées sur le tableau 1 (toutes les figures sont regroupées au § 8.3.7).

TABLEAU 1

Échantillon	mesure côté A	mesure côté B	Remarque
1	fig. 8-2		
2	fig. 8-3		
6	fig. 8-4		voir ci-dessous
9	fig. 8-5		voir ci-dessous
10	fig. 8-6	fig. 8-7	voir ci-dessous
14	fig. 8-8	fig. 8-9	voir ci-dessous

Les échantillons 1, 2, 6 et 9 (qui sont symétriques) ont été essayés avec la terminaison cylindrique A du côté de la mesure, et la terminaison SMA employée était un court-circuit SMA.

Les échantillons 10 et 14 ont été essayés d'abord avec la terminaison cylindrique A du côté de la mesure, puis en sens inverse, la terminaison SMA employée étant toujours un circuit ouvert SMA, comme indiqué à la fin du § 8.2. Côté B, nous avons donc mesuré l'impédance linéique de transfert pour un conducteur interne, tandis que, côté A, nous avons mesuré l'impédance linéique de transfert en mode différentiel d'une paire de conducteurs.

8.3.3 Résultats pour le couplage de type 2

Ces mesures, réputées difficiles, ont parfaitement fonctionné. Comme l'amplificateur AMP1 n'est caractérisé que jusqu'à 10 MHz, nous ne donnons que nos résultats inférieurs à cette fréquence. Nos résultats sont acceptables dans l'intervalle spectral 70 kHz à 10 MHz.

Les résultats de mesure après traitement, donnant le coefficient de couplage électrique radial ζ_R exprimé en dB, apparaissent dans les figures indiquées sur le tableau 2 (toutes les figures sont regroupées au § 8.3.7).

TABLEAU 2

Échantillon	mesure côté A	mesure côté B	Remarque
1	fig. 8-10		
2	fig. 8-11		voir ci-dessous
6	fig. 8-12		
9	fig. 8-13		

Tous les essais ont été effectués avec la terminaison cylindrique A du côté de la paroi de la cage de Faraday, et la terminaison cylindrique B reliée à un circuit ouvert SMA. L'étude du niveau de bruit montre qu'une marge minimale de 10 dB entre le bruit et le niveau mesuré avec l'échantillon 2 n'est plus atteinte au delà de 1 MHz. Toutefois, pour cet échantillon, le fait que l'on obtienne un résultat dépendant un peu de la fréquence sur l'intervalle 70 kHz à 1 MHz, incite à la prudence.

8.3.4 Résultats pour le couplage de type 3

Sur le plan électrique, nos résultats semblent précis dans l'intervalle spectral 70 kHz à 20 MHz. Sur le plan électromagnétique, nous avons souvent constaté une importante variabilité du niveau reçu par l'instrument de mesure, en fonction de la position du câble à l'intérieur de la sonde à champ H parallèle, alors que le niveau obtenu était pratiquement indépendant de la position de l'étalon ZAT.

Les résultats de mesure après traitement, donnant l'impédance transfert axial Z_{AT} exprimée en dB(Ω), apparaissent dans les figures indiquées sur le tableau 3 (toutes les figures sont regroupées au § 8.3.7).

TABLEAU 3

Échantillon	mesure côté A	mesure côté B	Remarque
1	fig. 8-14		
2			voir ci-dessous
6			
9	fig. 8-15		voir ci-dessous
10	fig. 8-16	fig. 8-17	voir ci-dessous
14	fig. 8-18 et fig. 8-19	fig. 8-20	voir ci-dessous

Pour les résultats indiqués dans le tableau 3 :

- les échantillons 1, 2 et 9 étaient terminés par un court-circuit SMA, la terminaison cylindrique A étant du côté de la mesure ;
- les échantillons 10 et 14 étaient terminés par un circuit ouvert SMA, les mesures étant effectuées du côté de la terminaison cylindrique A, et de l'autre côté.

Pour les câbles coaxiaux (échantillons 1 et 2), qui auraient, s'ils étaient parfaitement symétriques, une réponse nulle au couplage de type 3, la réponse dépend de la forme donnée au câble et de la contrainte exercée sur celui-ci. Ceci est surtout apparent pour l'échantillon 2 sur lequel le moindre mouvement change complètement la réponse, et pour lequel nous observons (du fait de l'évolution des contraintes internes ?) une évolution de la réponse au cours du temps. Cette réponse était de plus souvent dans le bruit, et n'a donc pas été représentée, bien qu'elle puisse être majorée par environ $-100 \text{ dB}(\Omega)$ à 100 kHz, et par $-96 \text{ dB}(\Omega)$ de 100 kHz à 10 MHz.

La variabilité de la réponse des câbles multiconducteurs en fonction de la position dans la pince est très grande. Pour l'échantillon 10 par exemple, si nous cherchons les valeurs extrêmes obtenues en déplaçant le câble dans la sonde à champ H parallèle, à 100 kHz la variabilité est de 20 dB pour les mesures côté A et de 25 dB pour les mesures côté B. Nous avons retenu la courbe correspondant à une réponse moyenne. Ce phénomène se retrouve de façon spectaculaire sur l'échantillon 14, pour lequel les deux courbes montrées pour la mesure côté A ont été relevées pour deux positions différentes du câble dans la sonde ZAT. Toujours pour l'échantillon 14, la variabilité maximale relevée à 1 MHz est de 36 dB du côté A et de 14 dB du côté B. Nous notons que la réponse minimale est souvent obtenue au voisinage du centrage idéal dans la sonde.

Par contre, lorsque le câble multiconducteur Fileca F 6113-19 est raisonnablement bien centré dans la sonde à champ H parallèle, les résultats ne correspondant pas à un mode différentiel (c'est-à-dire les résultats autres que ceux obtenus au côté A pour l'échantillon 10) sont assez bien groupés, comme le montre la similitude entre la figure 8-15 et la figure 8-17, d'une

part, et les résultats que nous avons obtenus avec d'autres échantillons, d'autre part. L'ensemble de ces résultats est bien représenté, à ± 5 dB, par une impédance de transfert axial croissante avec la fréquence, valant -86 dB(Ω) à 100 kHz, -74 dB(Ω) à 1 MHz et -55 dB(Ω) à 10 MHz.

8.3.5 Résultats pour le couplage de type 4

Pour le couplage de type 4, la réponse dépend fortement, ce qui est normal, de l'orientation de l'échantillon quand nous le faisons pivoter autour de son axe. Nous avons donné les résultats pour le signal maximum et pour le signal minimum. Attention, les extréma ne sont pas atteints pour toutes les fréquences simultanément. Dans nos recherches de minimum et de maximum, nous avons uniquement comparé les valeurs obtenues à la fréquence de 1 MHz.

Nos résultats de mesure après traitement, donnant l'admittance de transfert parallèle Y_{PT} exprimée en dB(mS), apparaissent dans les figures indiquées sur le tableau 4 (toutes les figures sont regroupées au § 8.3.7).

TABLEAU 4

Échantillon	mesure côté A	mesure côté B	Remarque
1	fig. 8-21		valeur maximale à 1 MHz
1	fig. 8-22		valeur minimale à 1 MHz
6	fig. 8-23		valeur maximale à 1 MHz
6	fig. 8-24		valeur minimale à 1 MHz
9	fig. 8-25		valeur maximale à 1 MHz
9	fig. 8-26		valeur minimale à 1 MHz

Selon la position d'un échantillon dans la sonde YPT, la réponse n'évolue pas de plus de 7 dB : une position bien centrée donne donc un résultat assez reproductible. Il n'est pas apparu nécessaire d'effectuer un réglage fin de l'équilibrage par la commande prévue à cet effet sur le préamplificateur AMP2, car elle n'affecte pas la déviation maximale. Nous avons par contre vérifié que les niveaux et la phase délivrés par les deux amplificateurs AMP1 étaient convenables. La réponse de l'échantillon 2 était noyée par le bruit de mesure. La courbe correspondante n'apparaît donc pas.

8.3.6 Résultats pour le couplage de type 5

Lors des mesures d'impédance de transfert parallèle, il n'y a aucune variabilité de la mesure en fonction de la position du câble à l'intérieur de la sonde à champ H parallèle, pour autant que l'échantillon soit bien mis en place. Comme pour le couplage de type 4, la réponse dépend

fortement de l'orientation de l'échantillon quand il est pivoté autour de son axe. Nous avons généralement donné des résultats pour le signal maximum, mais parfois également pour le signal minimum. Attention, le signal minimum n'est pas atteint pour toutes les fréquences simultanément. Dans nos recherches de minimum (et de maximum), nous avons uniquement comparé les valeurs obtenues à la fréquence de 1 MHz.

Nos résultats de mesure après traitement, donnant l'impédance de transfert parallèle Z_{PT} exprimée en dB(Ω), apparaissent dans les figures indiquées sur le tableau 5 (toutes les figures sont regroupées au § 8.3.7).

TABLEAU 5

Échantillon	mesure côté A	mesure côté B	Remarque
1	fig. 8-27		valeur maximale à 1 MHz
1	fig. 8-28		valeur minimale à 1 MHz
2	fig. 8-29		valeur maximale à 1 MHz
2	fig. 8-30		valeur minimale à 1 MHz
9	fig. 8-31		valeur maximale à 1 MHz
10	fig. 8-32	fig. 8-34	valeur maximale à 1 MHz
10	fig. 8-33	fig. 8-35	valeur minimale à 1 MHz
14	fig. 8-36	fig. 8-37	valeur maximale à 1 MHz

Pour les résultats indiqués dans le tableau 5 :

- les échantillons 1, 2 et 9 étaient terminés par un court-circuit SMA, la terminaison cylindrique A étant du côté de la mesure ;
- les échantillons 10 et 14 étaient terminés par un circuit ouvert SMA, les mesures étant effectuées du côté de la terminaison cylindrique A, et de l'autre côté.

Dans le cas du câble artificiel (échantillon 14), la réponse dépend évidemment de l'abscisse le long de la fente, et de l'angle. Nous avons donc cherché une abscisse permettant d'obtenir le plus grand maximum en fonction de l'angle, puis cette abscisse a été figée.

Nous notons que pour les courbes correspondant à des minima, la réponse est évidemment très sensible à la moindre variation d'angle du câble, et qu'elle évolue donc dans le temps : c'est ce qui explique les raccordements parfois problématiques à 1 MHz.

8.3.7 Figures

Les 36 figures suivantes montrent les courbes citées dans les tableaux 1 à 5.

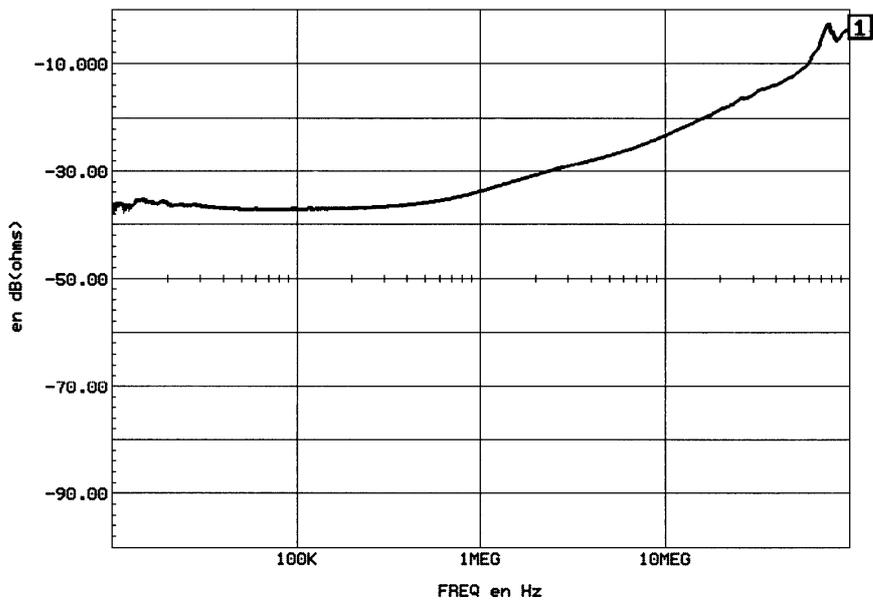


Fig. 8-2:
 Z_T échantillon 1.

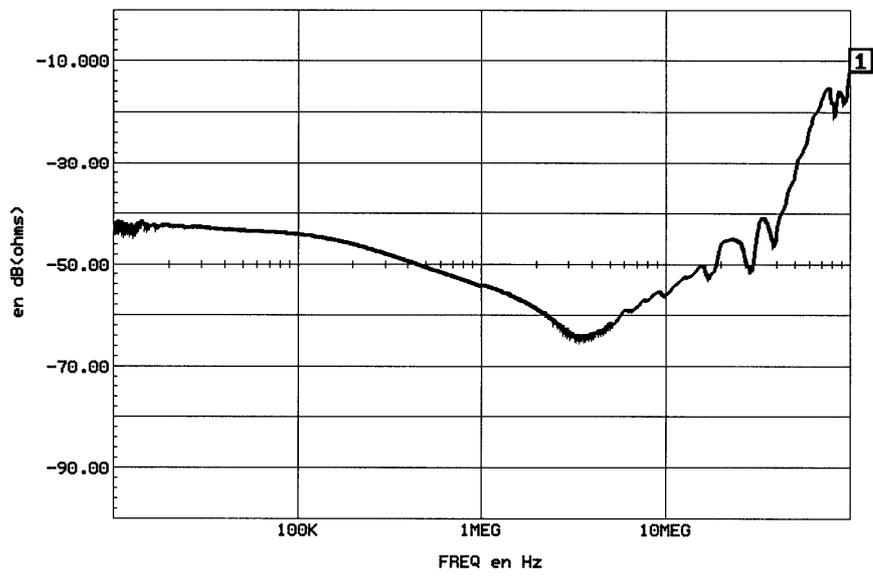


Fig. 8-3:
 Z_T échantillon 2.

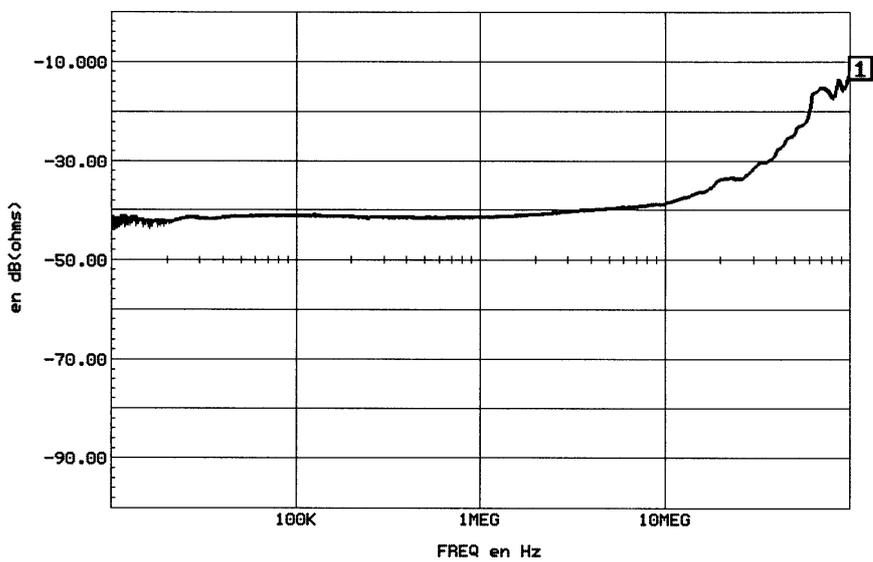


Fig. 8-4:
 Z_T échantillon 6.

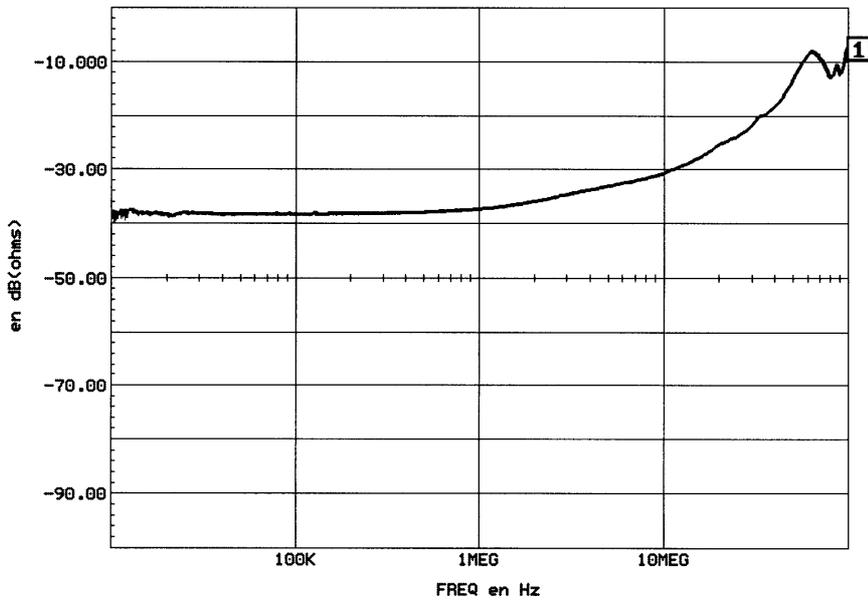


Fig. 8-5:
Z_T échantillon 9.

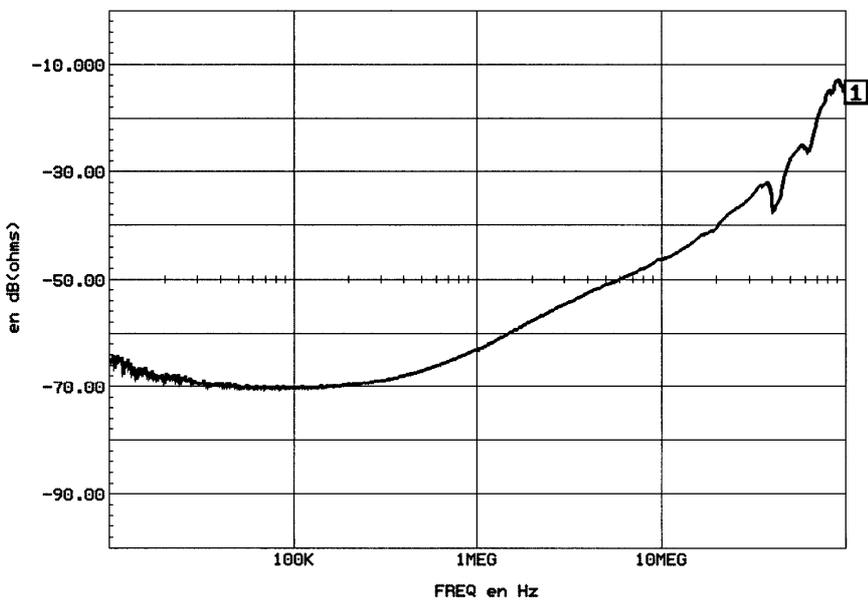


Fig. 8-6:
Z_T échantillon 10
côté A.

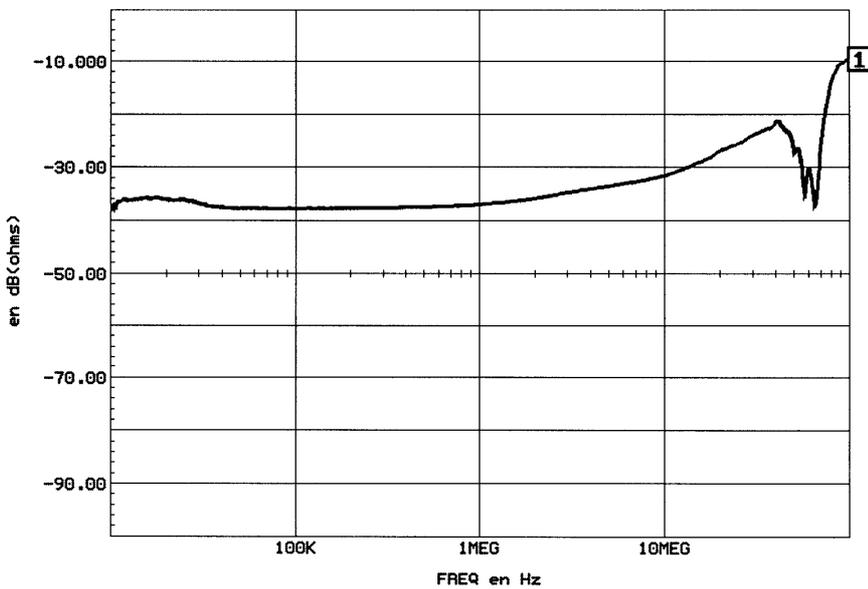


Fig. 8-7:
Z_T échantillon 10
côté B.

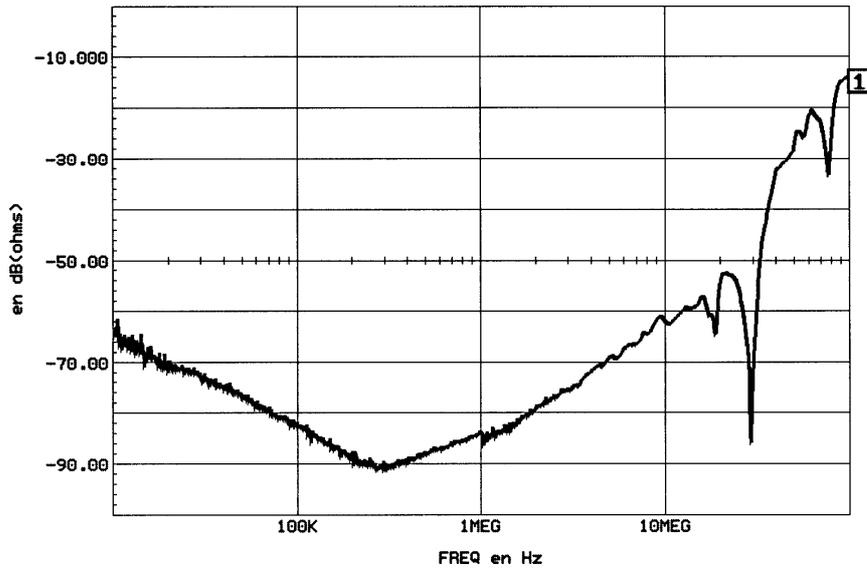


Fig. 8-8:
 Z_T échantillon 14
 côté A.

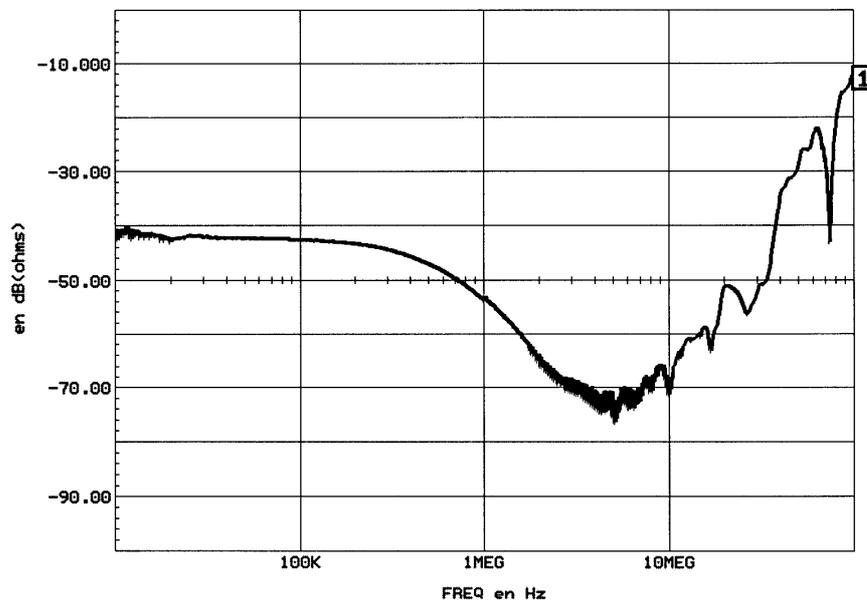


Fig. 8-9:
 Z_T échantillon 14
 côté B.

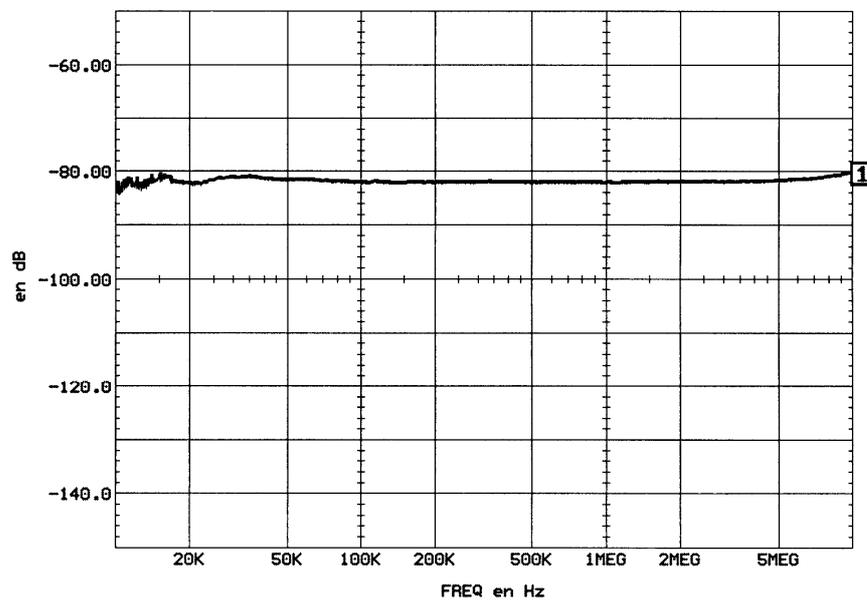


Fig. 8-10:
 ζ_R échantillon 1.

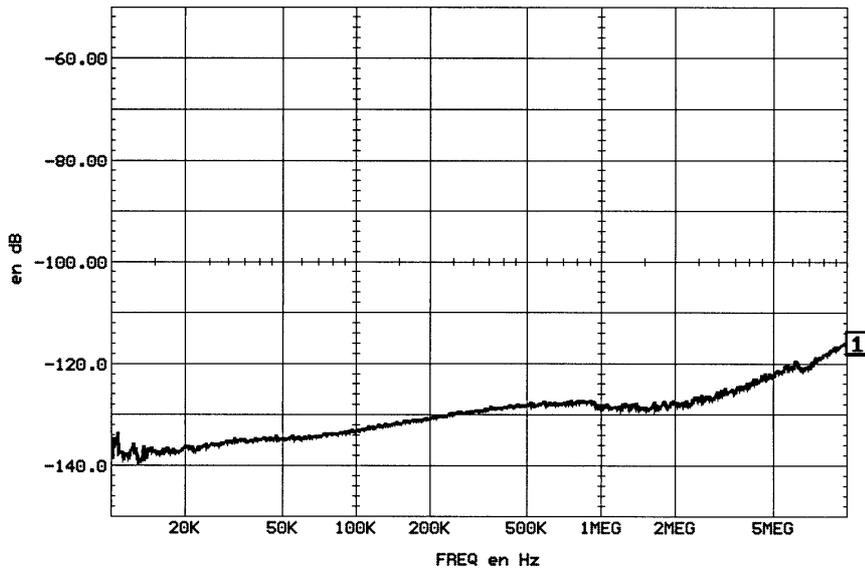


Fig. 8-11:
 ζ_R échantillon 2.

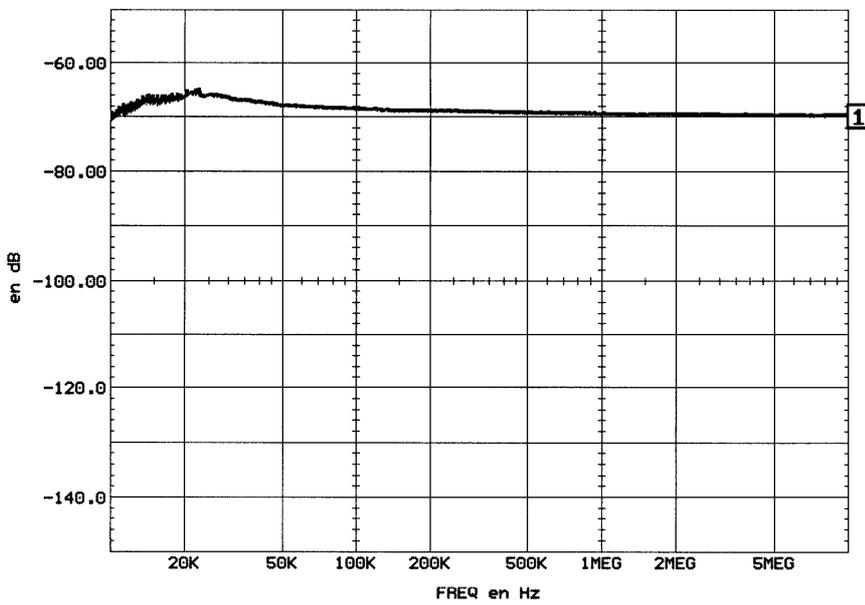


Fig. 8-12:
 ζ_R échantillon 6.

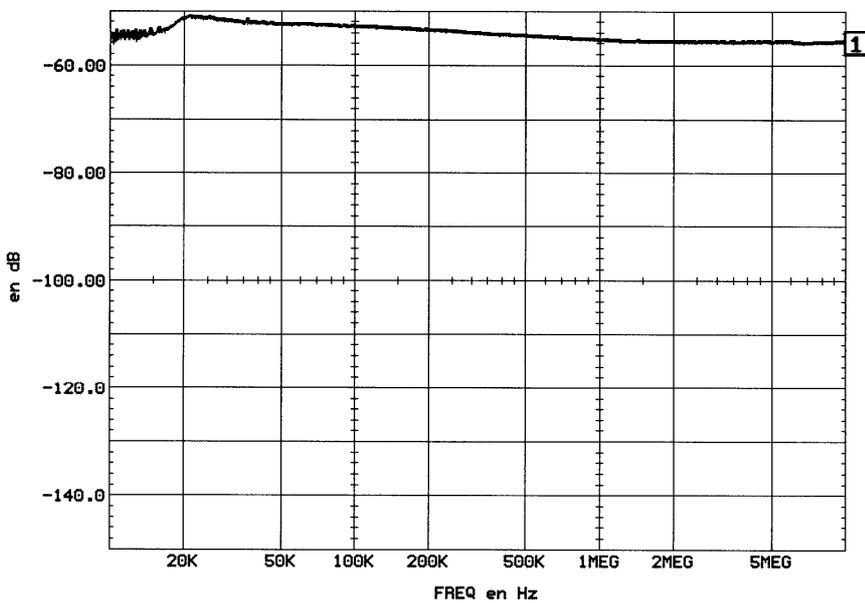


Fig. 8-13:
 ζ_R échantillon 9.

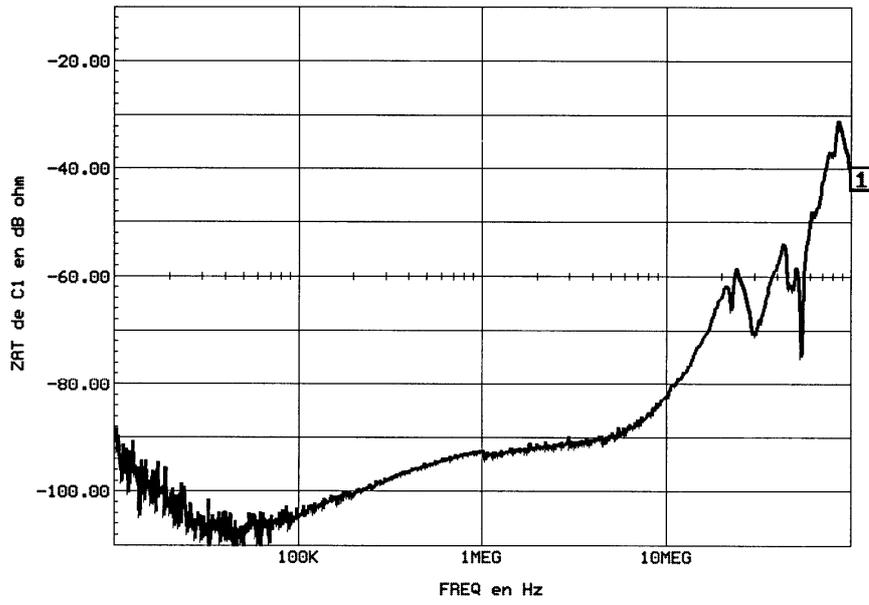


Fig. 8-14:
Z_{AT} échantillon 1.

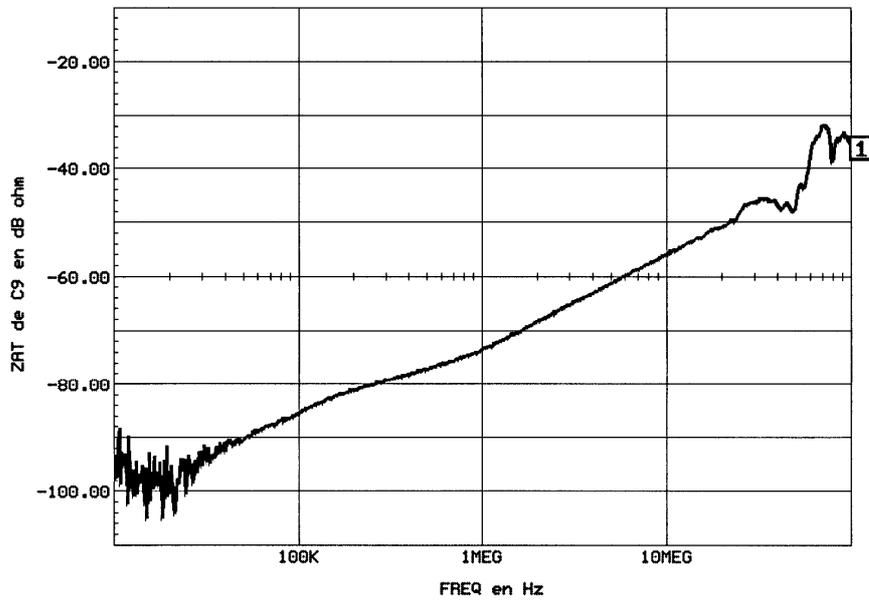


Fig. 8-15:
Z_{AT} échantillon 9.

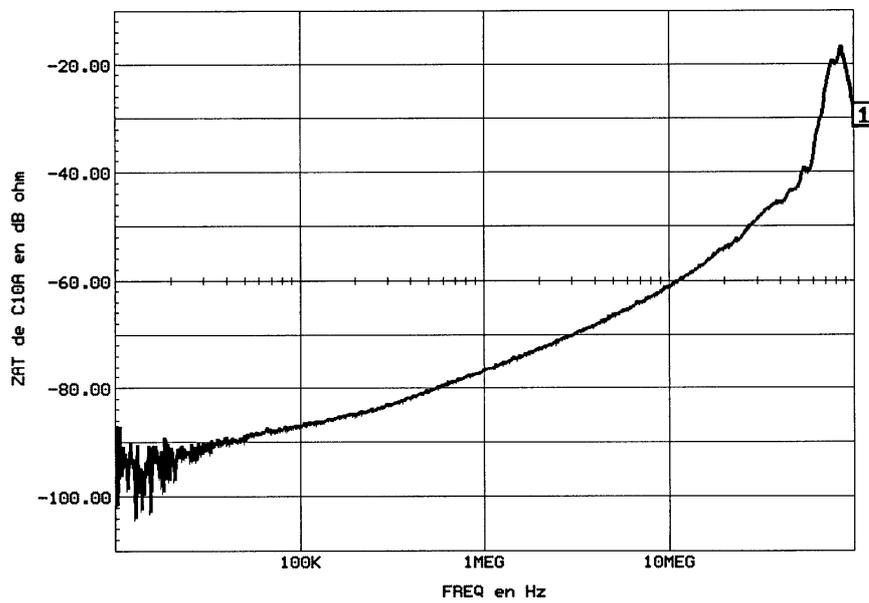


Fig. 8-16:
Z_{AT} échantillon 10
côté A.

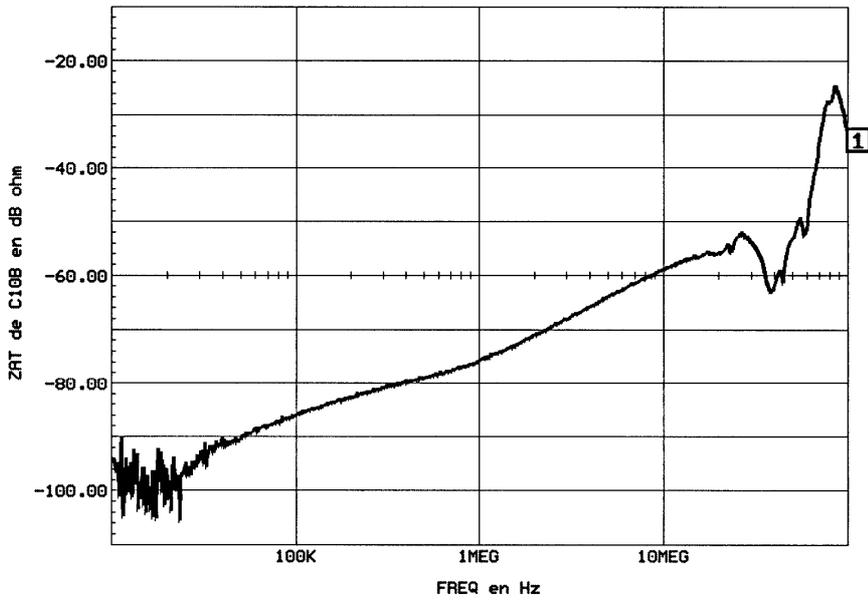


Fig. 8-17:
 Z_{AT} échantillon 10
 côté B

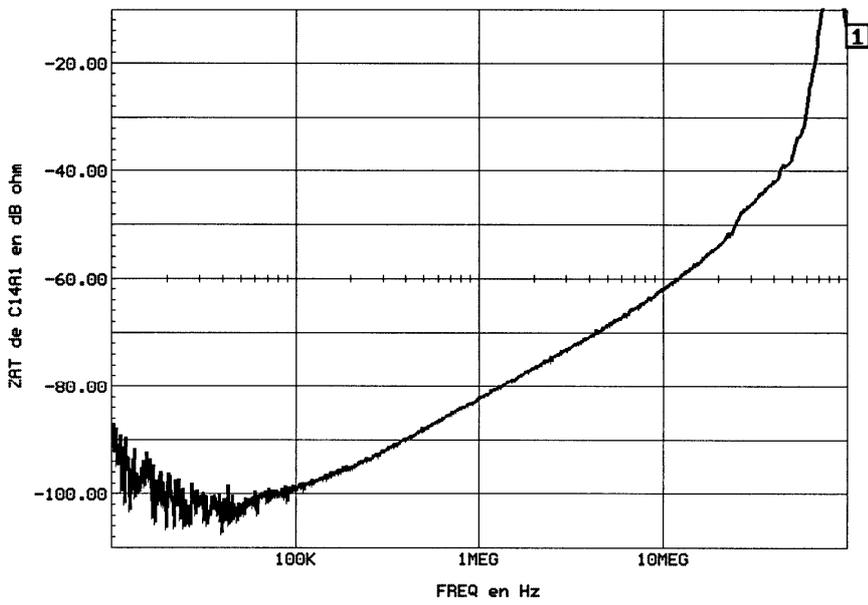


Fig. 8-18:
 Z_{AT} échantillon 14
 côté A, position 1.

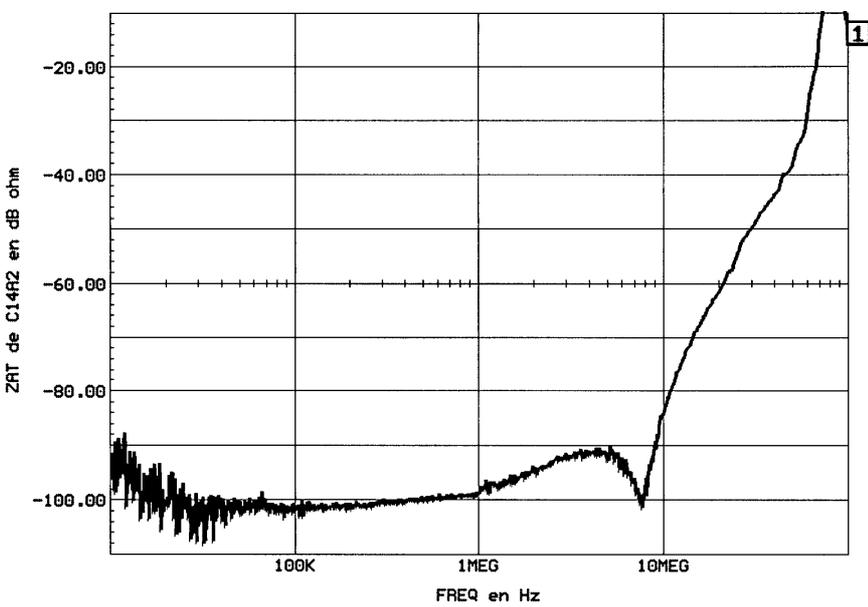


Fig. 8-19:
 Z_{AT} échantillon 14
 côté A, position 2.

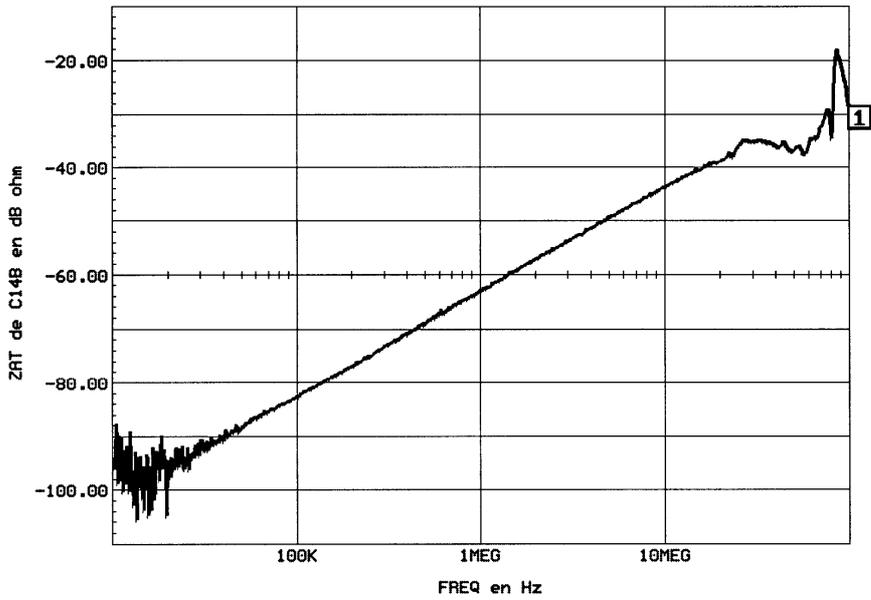


Fig. 8-20:
 Z_{AT} échantillon 14
 côté B.

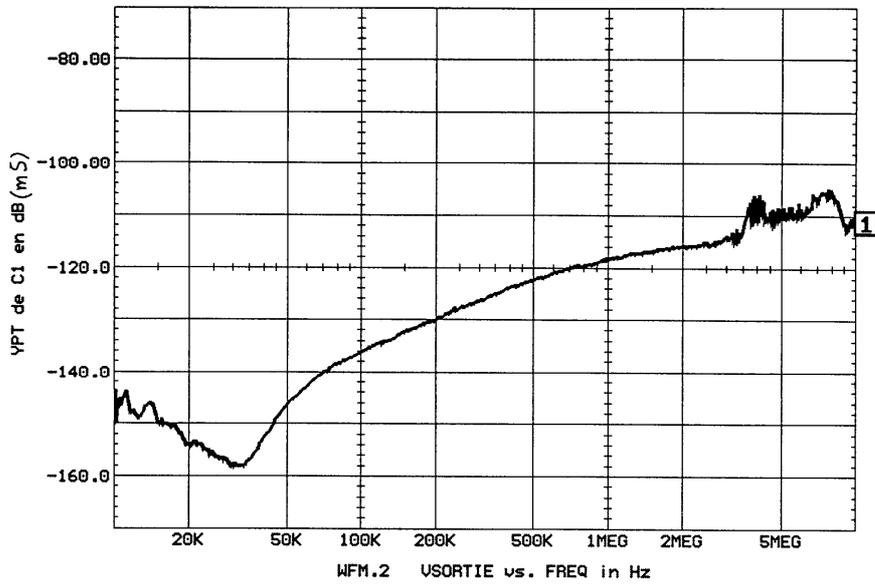


Fig. 8-21:
 Y_{PT} échantillon 1
 valeur maximale.

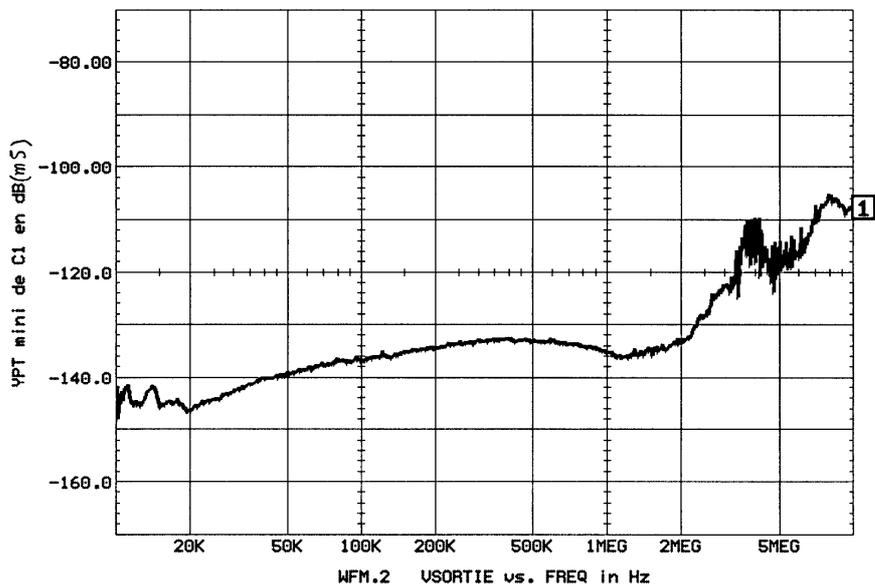


Fig. 8-22:
 Y_{PT} échantillon 1
 valeur minimale.

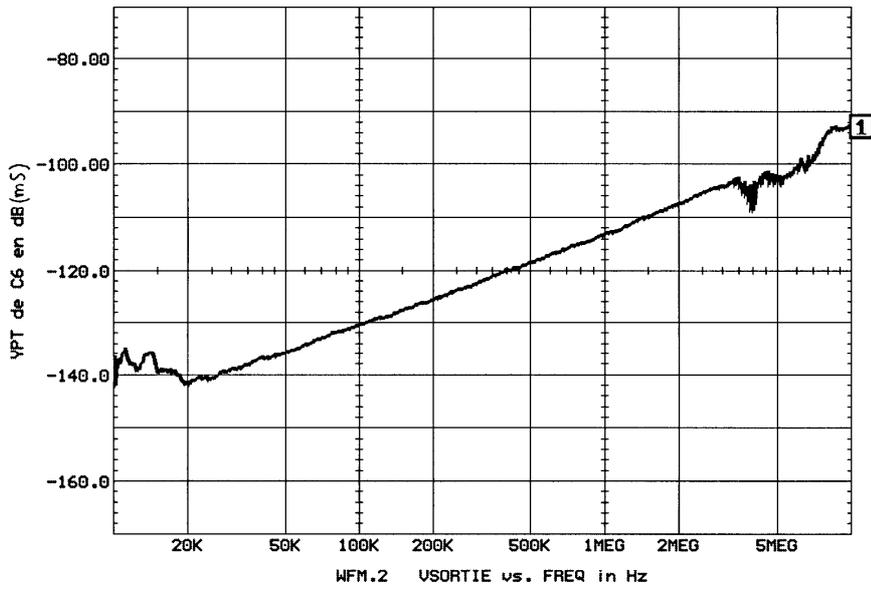


Fig. 8-23:
Y_{PT} échantillon 6
valeur maximale.

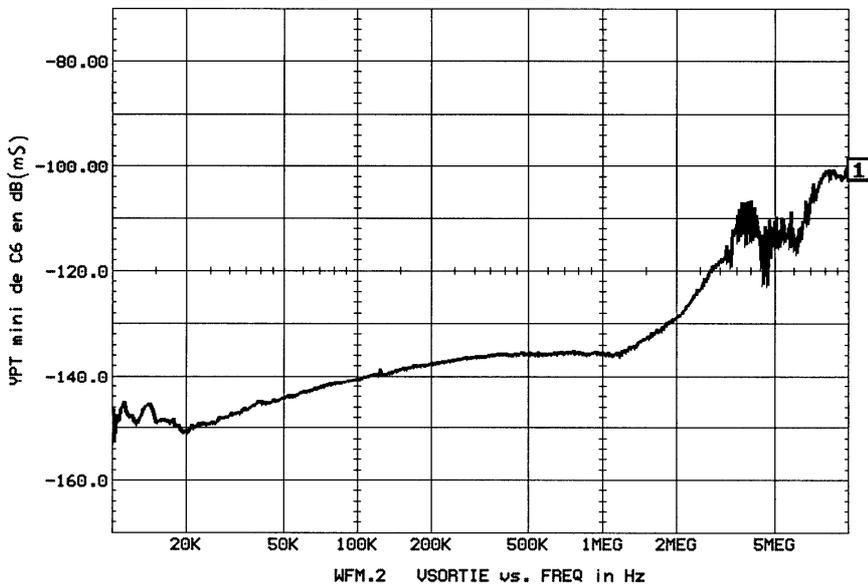


Fig. 8-24:
Y_{PT} échantillon 6
valeur minimale.

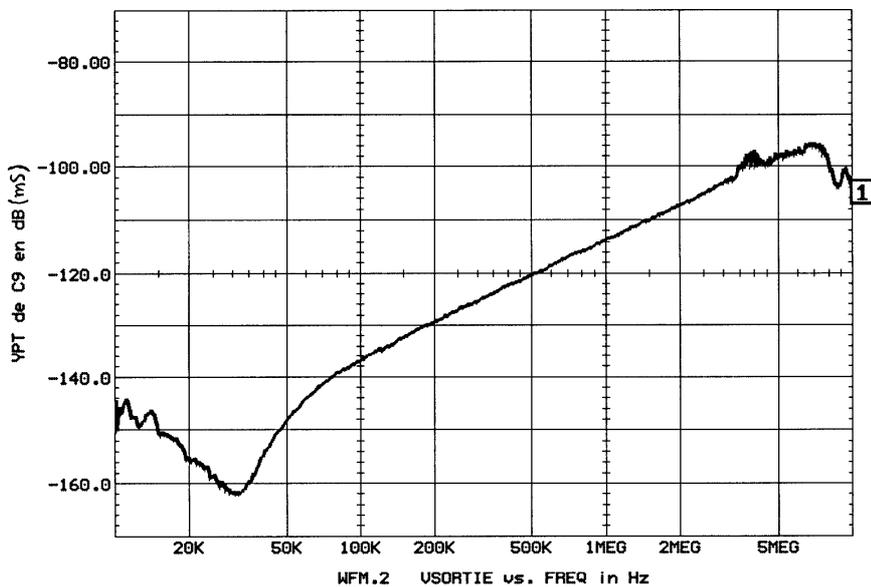


Fig. 8-25:
Y_{PT} échantillon 9
valeur maximale.

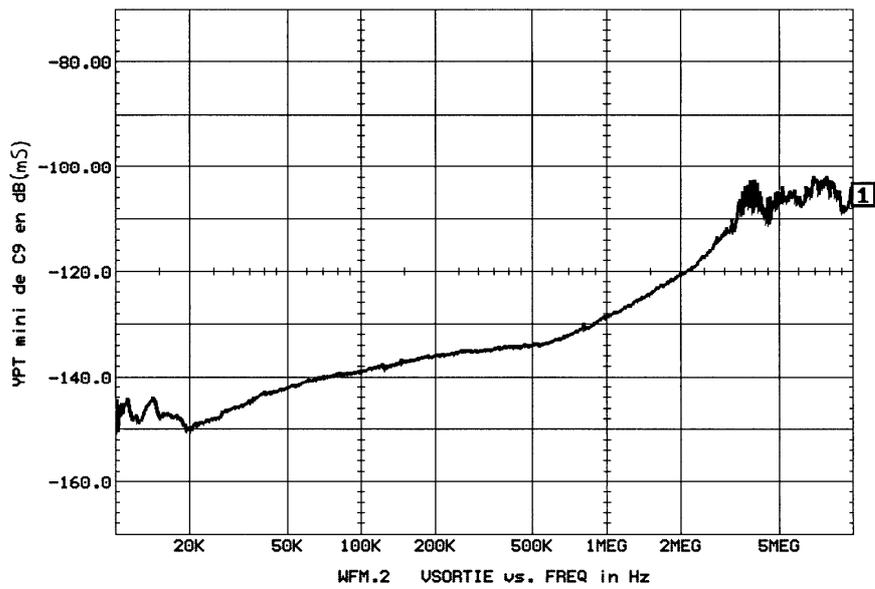


Fig. 8-26:
 Y_{PT} échantillon 9
 valeur minimale.

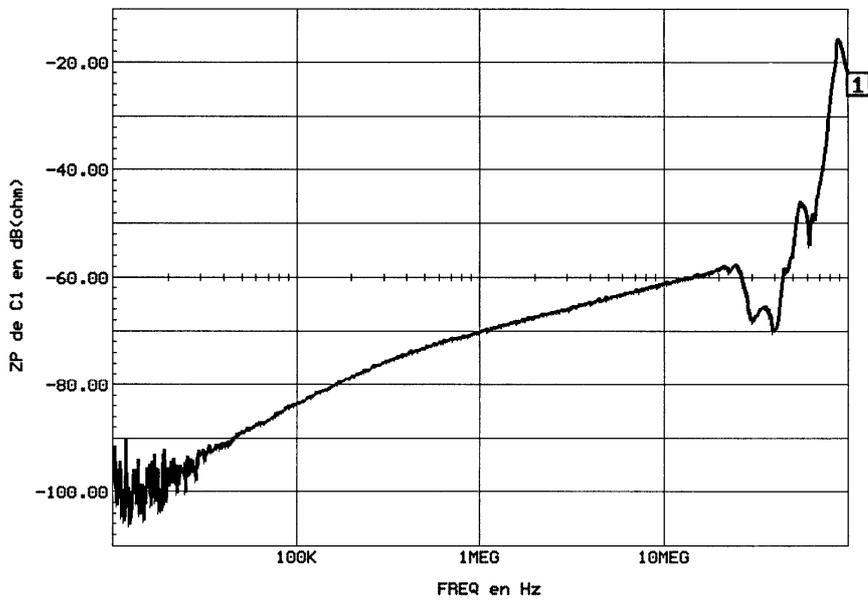


Fig. 8-27:
 Z_{PT} échantillon 1
 valeur maximale.

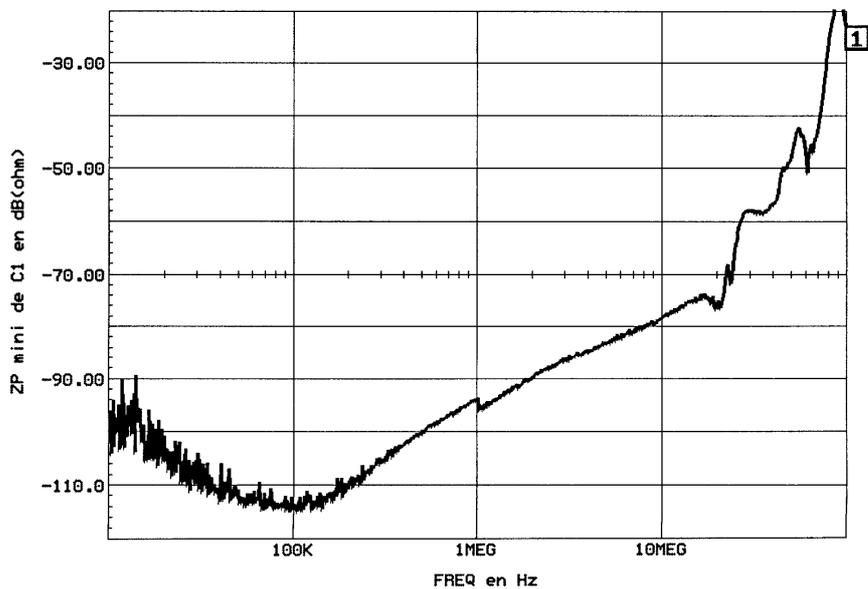


Fig. 8-28:
 Z_{PT} échantillon 1
 valeur minimale.

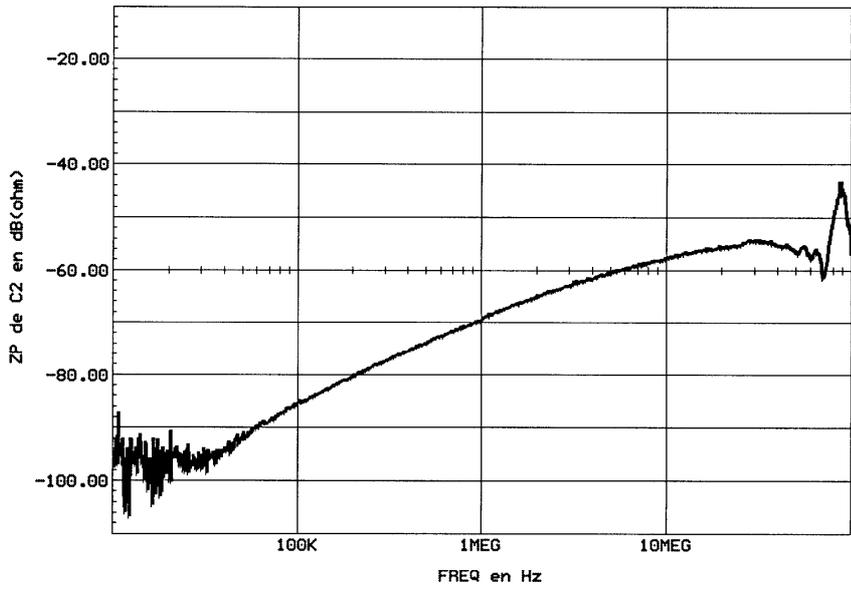


Fig. 8-29:
 Z_{PT} échantillon 2
 valeur maximale.

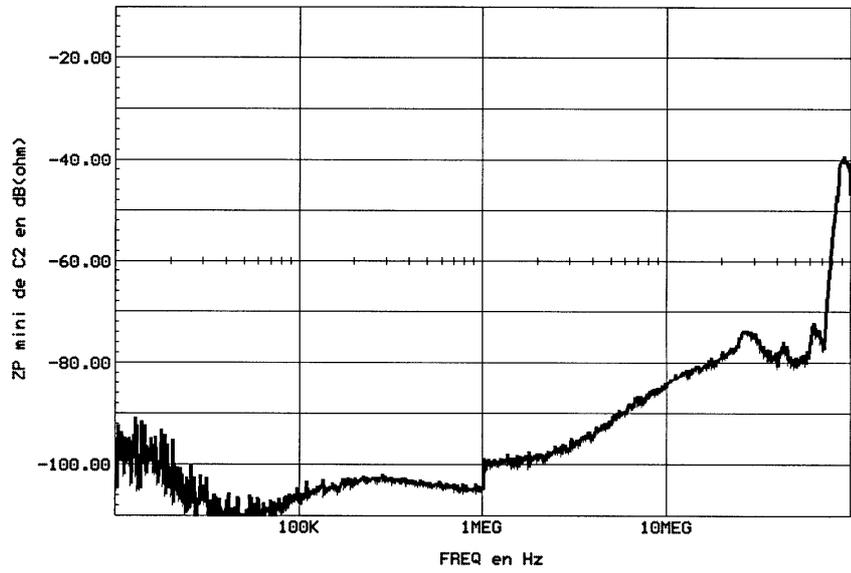


Fig. 8-30:
 Z_{PT} échantillon 2
 valeur minimale.

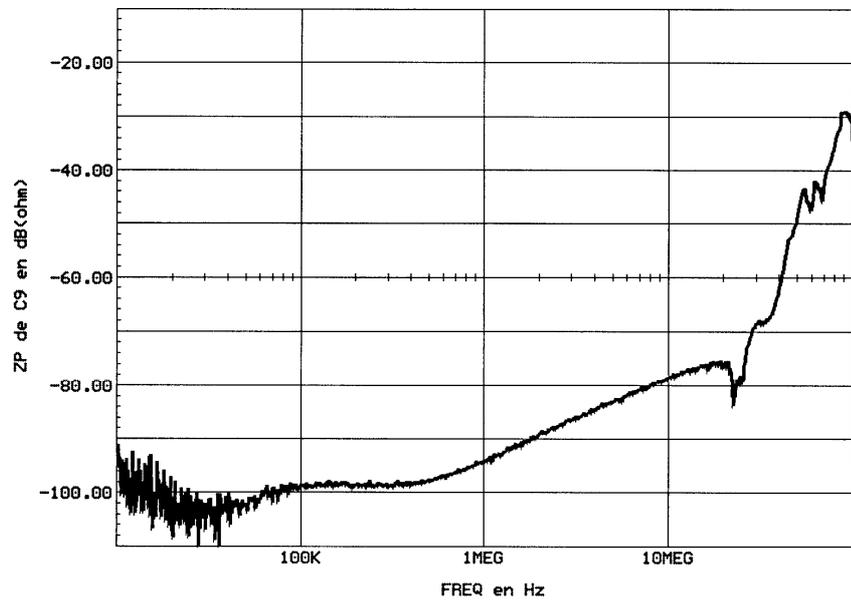


Fig. 8-31:
 Z_{PT} échantillon 9
 valeur maximale.

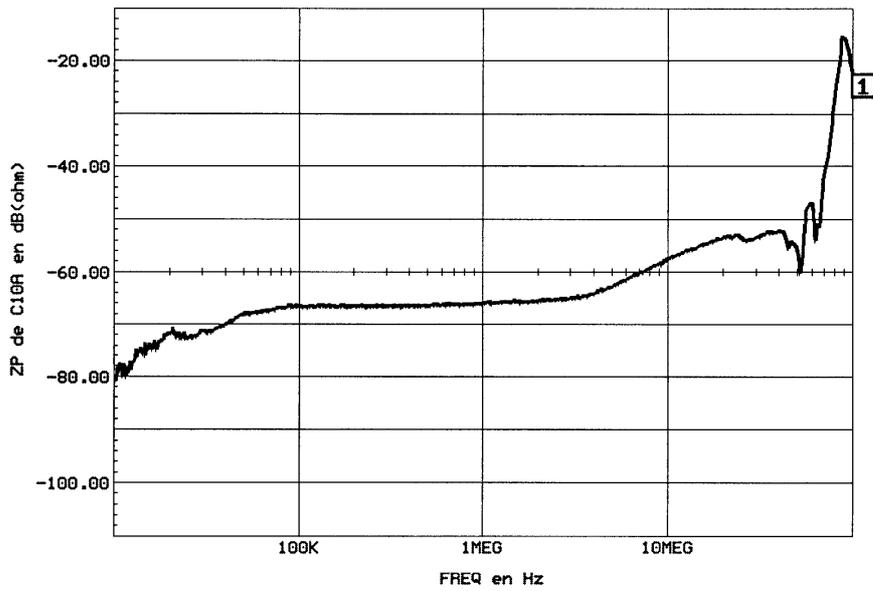


Fig. 8-32:
 Z_{PT} échantillon 10
 côté A,
 valeur maximale.

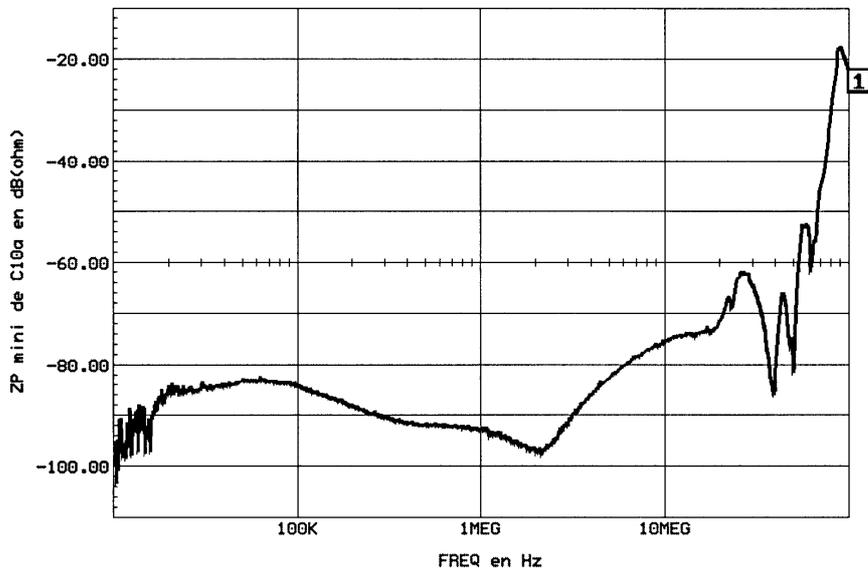


Fig. 8-33:
 Z_{PT} échantillon 10
 côté A,
 valeur minimale.

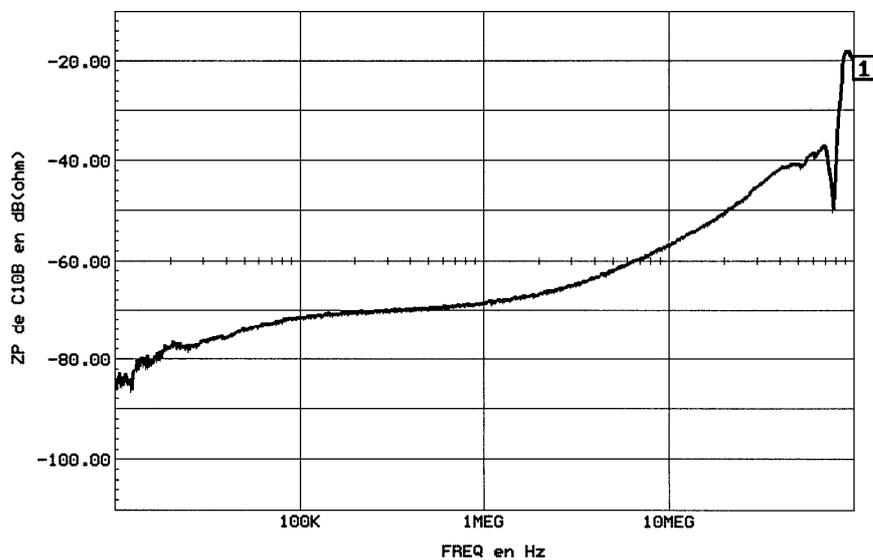


Fig. 8-34:
 Z_{PT} échantillon 10
 côté B,
 valeur maximale.

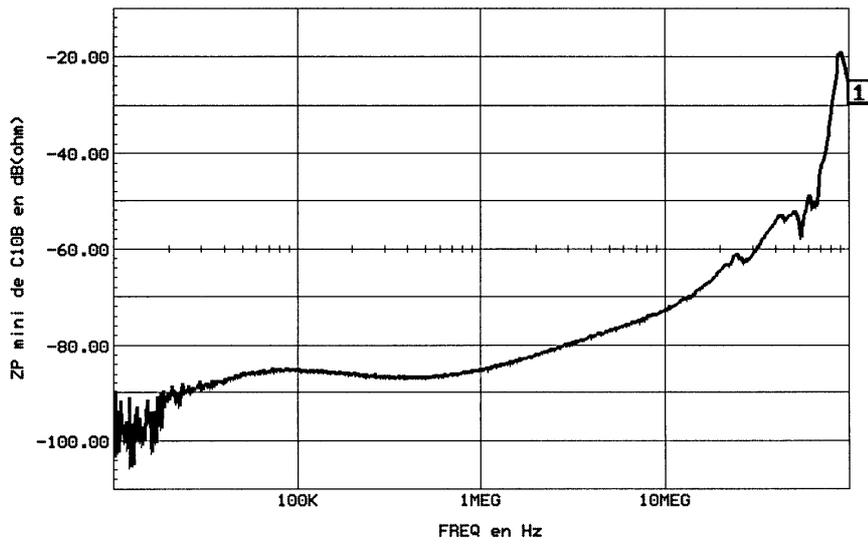


Fig. 8-35:
 Z_{PT} échantillon 10
 côté B,
 valeur minimale.

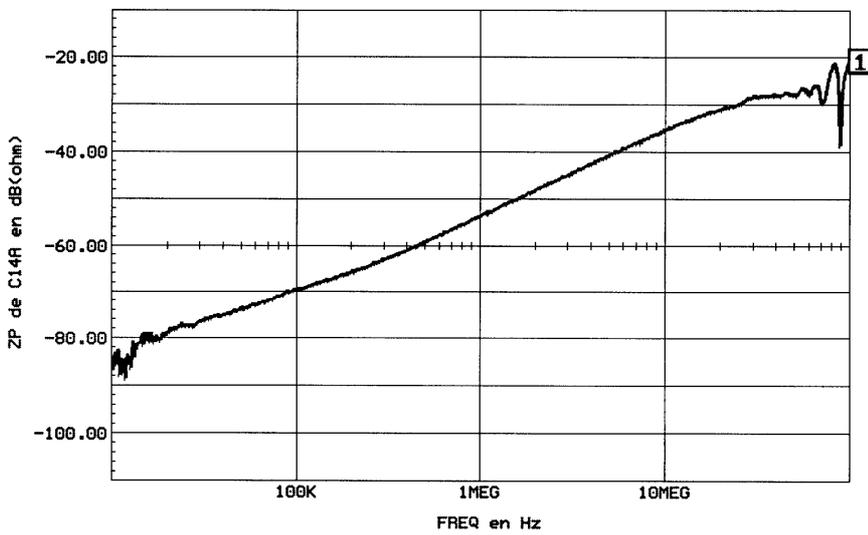


Fig. 8-36:
 Z_{PT} échantillon 14
 côté A,
 valeur maximale.

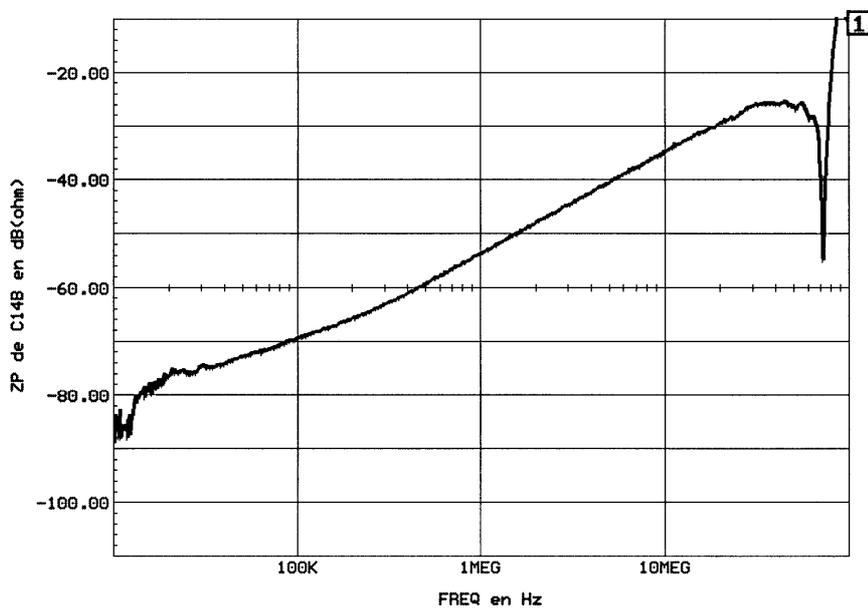


Fig. 8-37:
 Z_{PT} échantillon 14
 côté B,
 valeur maximale.

8.4 Discussion des résultats sur la caractérisation des échantillons

8.4.1 Discussion pour le couplage de type 1

En ce qui concerne les essais pour le couplage de type 1 présenté au § 8.3.2, nous notons que, pour les échantillons 1 et 2, et pour les mesures côté B sur les échantillons 10 et 14, nous avons bien mesuré une impédance linéique de transfert pour un conducteur interne relié aux terminaisons SMA. Les résultats correspondant apparaissent dans le tableau 6.

TABLEAU 6

Type de câble	Z_T pour un conducteur interne, à			Remarque
	100 kHz	1 MHz	10 MHz	
KX15	-37 dB(Ω/m)	-34 dB(Ω/m)	-24 dB(Ω/m)	croissant
RG-223	-44 dB(Ω/m)	-54 dB(Ω/m)	-56 dB(Ω/m)	
F 6113-19	-38 dB(Ω/m)	-37 dB(Ω/m)	-32 dB(Ω/m)	croissant
échantillon 14	-43 dB(Ω/m)	-54 dB(Ω/m)	-65 dB(Ω/m)	

Pour les câbles KX15 et F 6113-19 qui sont à simple tresse, et pour le câble RG-223 U, qui est à double tresse, nos résultats correspondent bien aux courbes classiquement observées [21] [27] [32] [33, § 6.3.2.4]. Nous notons que l'échantillon 14 se comporte aussi bien qu'un câble double tresse, ce qui montre que les deux fentes longitudinales ne détériorent pas trop les performances de l'écran vis-à-vis du couplage de type 1.

Pour l'échantillon 6, les autres conducteurs internes mis à la masse à leurs deux extrémités interagissent fortement avec le conducteur sur lequel est effectué la mesure, et conduisent à un comportement caractéristique d'un câble avec conducteur de drain, avec diminution d'environ 5 dB de l'impédance linéique de transfert apparente. Pour l'échantillon 9, nous obtenons une "impédance de transfert des conducteurs internes pris ensemble", ce paramètre étant classiquement utilisé pour caractériser les câbles multiconducteurs écrantés.

En ce qui concerne les mesure effectuées du côté A des échantillons 10 et 14, nous avons mesuré la différence des impédances linéiques de transfert pour les conducteurs internes non laissés en l'air, c'est-à-dire une impédance linéique de transfert en mode différentiel. L'impédance linéique de transfert en mode différentiel a un comportement qui correspond bien à ce qui a déjà été décrit par Démoulin *et al* [26], avec à 100 kHz une valeur typiquement de 30 dB plus faible que celle de l'impédance linéique de transfert d'un conducteur, et un écart beaucoup plus faible à 10 MHz.

8.4.2 Discussion pour le couplage de type 2

En ce qui concerne les essais pour le couplage de type 2 présenté au § 8.3.3, nos résultats pour le coefficient de couplage électrique radial d'un conducteur interne apparaissent dans le tableau 7.

TABLEAU 7

Type de câble	ζ_R pour un conducteur interne, à			Remarque
	100 kHz	1 MHz	10 MHz	
KX15	-82 dB	-82 dB	-80 dB	
RG-223	< -120 dB	< -120 dB		
F 6113-19	-68 dB	-69 dB	-70 dB	

Ces résultats correspondent à un coefficient de couplage électrique radial dépendant peu de la fréquence. Les résultats obtenus pour le KX15 et le RG-223 sont compatibles avec les valeurs majorantes que nous avons précédemment déterminées [40, table 1]. Le résultat obtenu avec le KX15 peut être comparé avec les (rares) résultats publiés, qui concernent des câbles à simple tresse :

- Merewether [16] donne, pour un câble coaxial RG-214, qui a une simple tresse, mais dont le diamètre extérieur est bien plus grand que le KX15, une valeur majorante de 0,05 pF/m pour la capacité mutuelle, ce qui correspond à $\zeta_R < -66$ dB, compte tenu d'une capacité interne nominale de 96,8 pF/m ;
- Hoelt [24] donne, pour deux échantillons de câble coaxial RG-58/U provenant de fabricants différents, des valeurs correspondants à $\zeta_R = -70$ dB et à $\zeta_R = -78$ dB ;
- Démoulin [21] [27] donne, pour cinq échantillons de câble coaxial définis par les caractéristiques de leur tresse, des valeurs correspondant à ζ_R prenant des valeurs entre -77 dB et -55 dB.

Enfin nous notons que la mesure effectuée sur l'échantillon 9 est environ 14 dB au dessus de celle obtenue pour l'échantillon 6. Ceci correspond bien au comportement attendu pour la mise en parallèle des sources de courant équivalentes aux champs des six conducteurs internes.

8.4.3 Discussion pour le couplage de type 3

En ce qui concerne les essais pour le couplage de type 3 présenté au § 8.3.4, nous notons que, pour les échantillons 1 et 2, et pour les mesures côté B sur les échantillons 10 et 14, nous avons bien mesuré une impédance linéique de transfert pour un conducteur interne relié aux terminaisons SMA. Les résultats correspondant apparaissent dans le tableau 8.

TABLEAU 8

Type de câble	Z_{AT} pour un conducteur interne, à			Remarque
	100 kHz	1 MHz	10 MHz	
KX15	< -100 dB(Ω)	-94 dB(Ω)	-82 dB(Ω)	imprécis
RG-223	< -100 dB(Ω)	<-96 dB(Ω)	<-96 dB(Ω)	imprécis
F 6113-19	-86 dB(Ω)	-74 dB(Ω)	-55 dB(Ω)	imprécis
échantillon 14	-84 dB(Ω)	-64 dB(Ω)	-44 dB(Ω)	imprécis

Nous avons vu au § 8.3.4 que ces résultats méritent d'être qualifiés d'imprécis. La raison en est facile à comprendre. Comme indiqué au § 7.9, le champ magnétique produit par la sonde à champ H axial n'est en fait axial que sur quelques centimètres, les lignes de champ prenant ensuite des orientations différentes, avec une composante radiale non nulle. Lorsque la symétrie axiale n'est pas parfaite, ces composantes non axiales excitent facilement un couplage de type 5 parasite. Malheureusement, pour les échantillons que nous considérons ici, la sensibilité du câble pour ce couplage de type 5 est bien supérieure (il suffit de comparer les tableaux 8 et 10) à celle obtenue pour le couplage de type 3, et le couplage de type 5 parasite perturbe donc facilement la mesure. Il en résulte une variation de la tension mesurée lorsque l'échantillon est déplacé dans la sonde, alors que pour l'étalon Z_{AT} décrit au § 7.8.2, qui est principalement sensible au couplage de type 3, la tension mesurée est pratiquement indépendante de la position dans la sonde.

La comparaison entre les mesures effectuées sur l'échantillon 9 et l'échantillon 10 côté B suggère bien que le couplage de type 3 induit principalement dans le câble F 6113-19 une tension en mode commun, mais la comparaison entre les mesures effectuées de chaque côté de l'échantillon 10 ne permet pas de confirmer ce point. Pour l'échantillon 14, notons que (7-23) utilisée avec $m_1 = 13,7 \text{ m}^{-1}$ et $r_1 = 1,65 \text{ mm}$ donne -61 dB(Ω) à 1 MHz, ce qui suggère, comme nous nous y attendons du fait des deux fentes, que l'écran n'agit pas.

N.Mohamudally [48] a aussi étudié l'impédance de transfert axial, mais ses résultats sont difficiles à comparer à ceux exposés ici, car ils se rapportent à des câbles très différents.

8.4.4 Discussion pour le couplage de type 4

En ce qui concerne les essais pour le couplage de type 4 présenté au § 8.3.5, nos résultats apparaissent dans le tableau 9.

TABLEAU 9

Type de câble	Y_{PT} pour un conducteur interne, à			Remarque
	100 kHz	1 MHz	10 MHz	
KX15	-196 dB(S)	-178 dB(S)		croissant
F 6113-19	-190 dB(S)	-173 dB(S)		croissant

Nos courbes montrent bien entre 100 kHz et 1 MHz une croissance de Y_{PT} proche des 20 dB par décade attendus pour un phénomène essentiellement capacitif. D'autre part, nous observons bien, pour les différents échantillons, une variation importante par rotation du câble.

Nous ne disposons pas de données auxquelles nous pourrions comparer les résultats du tableau 9. Toutefois, l'utilisation de (1-14) avec les données du tableau 7 nous donne, à 1 MHz :

- pour le câble KX15, avec $r_E = 1,5$ mm, une admittance de transfert parallèle de -202 dB(S)
- pour le câble F 6113-19, avec $r_E = 2,2$ mm, une admittance de transfert parallèle de -185 dB(S)

Les valeurs données par le tableau 9 semblent donc plus élevées que celles auxquelles nous nous attendions, sur la base de l'analyse simpliste du § 1.6.

8.4.5 Discussion pour le couplage de type 5

En ce qui concerne les essais pour le couplage de type 5 présenté au § 8.3.6, nous notons que, pour les échantillons 1 et 2, et pour les mesures côté B sur les échantillons 10 et 14, nous avons bien mesuré une impédance de transfert parallèle pour un conducteur interne. Les résultats correspondant aux courbes "maximales" apparaissent dans le tableau 10.

TABLEAU 10

Type de câble	Z_{PT} pour un conducteur interne, à			Remarque
	100 kHz	1 MHz	10 MHz	
KX15	-84 dB(Ω)	-70 dB(Ω)	-61 dB(Ω)	croissant
RG-223	-85 dB(Ω)	-70 dB(Ω)	-58 dB(Ω)	croissant
F 6113-19	-71 dB(Ω)	-68 dB(Ω)	-56 dB(Ω)	croissant
échantillon 14	-70 dB(Ω)	-54 dB(Ω)	-35 dB(Ω)	croissant

Pour les échantillons 10 et 14, la comparaison entre les résultats obtenus du côté B et ceux obtenus du côté A, montre que ces derniers ne sont pas plus faibles que les premiers. Ceci indique que la perturbation est pratiquement couplée en mode différentiel.

Notons enfin que les courbes obtenues pour l'impédance de transfert en mode différentiel que nous avons présentée sont différentes de celles montrées dans [41] et [43], qui comportaient des erreurs (il s'agissait d'un autre échantillon du câble F 6113-19), mais conformes à celles publiées dans [45] et [47], qui sont relatives à l'échantillon 10.

8.5 Résultats attendus pour l'illumination en onde plane

Supposons que l'échantillon 10, dont les conducteurs étudiés sont court-circuités à une extrémité, soit placé dans la situation étudiée au § 6.4, avec un champ appliqué de 1 V/m. Quels seraient dans ce cas les tensions qui apparaîtraient sur les conducteurs internes, aux bornes d'un instrument de mesure d'impédance d'entrée par exemple égale à 50Ω ?

Il est d'emblée clair que, du fait du court-circuit, nous n'aurons pas de contribution de ζ_R ni de Y_{PT} .

En excitation longitudinale, nous aurons une contribution de Z_T et une contribution de $\langle Z_{PT} \rangle$. Pour $\ell = 0,55$ m, $r_E = 2,2$ mm et $Z_T = -37$ dB(Ω /m) à 1 MHz, selon (6-24) et (6-25), le terme en Z_T vaut -131 dB(V) à 1 MHz. Le terme en $\ell \langle Z_{PT} \rangle$ est l'intégrale d'un vecteur qui fait un tour tous les 73 mm de câble. Majorons-le par la valeur de Z_{PT} mesurée, multipliée par la moitié de 73 mm. Dans ce cas, pour $Z_{PT} = -68$ dB(Ω) à 1 MHz, le terme en Z_{PT} est majoré par -152 dB(V) à 1 MHz.

Ce calcul vaut pour les mesures du côté B. Du côté A par contre, nous aurons un mode différentiel, ce qui, selon les courbes précédentes, conduit à une atténuation d'environ 26 dB pour Z_T et à une gain d'environ 3 dB pour Z_{PT} .

En excitation transversale, nous n'aurons qu'une contribution de Z_{AT} . Pour $\ell = 0,55$ m, et $Z_{AT} = -74$ dB(Ω) à 1 MHz, selon (6-28) et (6-29), le terme en Z_{AT} peut être estimé à -131 dB(V) à 1 MHz.

8.6 Définition des mesures en cellule TEM

Les essais ont été effectués au CEG, dans une grande cellule GTEM, modèle EMCO 5317, dont les dimensions caractéristiques sont 7,7 m par 4,1 m par 3,1 m. Les deux configurations d'essai sont représentées sur la figure 8-38 pour l'excitation transversale, et sur la figure 8-39 pour l'excitation longitudinale.

Les mesures ont été effectuées à l'aide d'un analyseur de réseau HP3577A. La sortie était reliée à l'entrée d'un amplificateur Amplifier Research 100L, dont la sortie alimentait la cellule GTEM à travers un coupleur 50 dB. L'amplitude de l'onde incidente prélevée par le coupleur était dirigée vers l'entrée de référence de l'analyseur de réseau. Le signal provenant d'un échantillon sous test passait préalablement dans un amplificateur Sonoma 310N installé directement sous la cellule GTEM, puis était dirigé vers l'entrée A de l'analyseur de réseau. Les câbles véhiculant les signaux à faible niveau étaient de type semi-rigide.

Le champ a été préalablement étalonné au voisinage de l'installation prévue des échantillons, à l'aide d'une chaîne Mélopée TSN245, équipée du capteur TSN245-E10 en position 56,2 V/m pour 400 mV, la sortie de la chaîne étant directement reliée à l'entrée A de l'analyseur de réseau. Toutes les valeurs mesurées ont été normalisées à 1 V/m à partir de cet étalonnage. A titre indicatif, le champ appliqué à 3,244 MHz était de 44,3 V/m efficace.

Après qu'une mise à la masse minutieuse ait été effectuée tant au niveau de l'amplificateur 100L que de l'analyseur de réseau (ce qui a permis de gagner au moins 45 dB de rapport signal sur bruit à 10 kHz), les mesures ont été effectuées avec une hauteur sous szeptum de 1,50 m.

La photographie de la figure 8-40 montre un échantillon sous test de type rigide installé dans la cellule GTEM. Les mesures ont été effectuées pour les 16 échantillons dont nous disposons, mais nous nous limiterons au § 8.7 à présenter les résultats pour l'échantillon 10. En excitation longitudinale, nous avons mesuré la télédiaphonie, tandis qu'en couplage transversal, nous avons mesuré le signal à gauche, direction prise par rapport au sens de propagation de l'onde dans la cellule GTEM. Pour l'échantillon 10, des essais ont été faits avec l'extrémité éloignée connectée au plancher de la cellule, et aussi avec cette extrémité isolée du plancher, dans le but de réduire fortement le courant de mode commun, donc la contribution de Z_T . L'échantillon sous test était plaqué contre le plancher de la cellule, un échantillon souple tel que l'échantillon 10 étant évidemment mieux plaqué que l'échantillon rigide montré sur la figure 8-40.

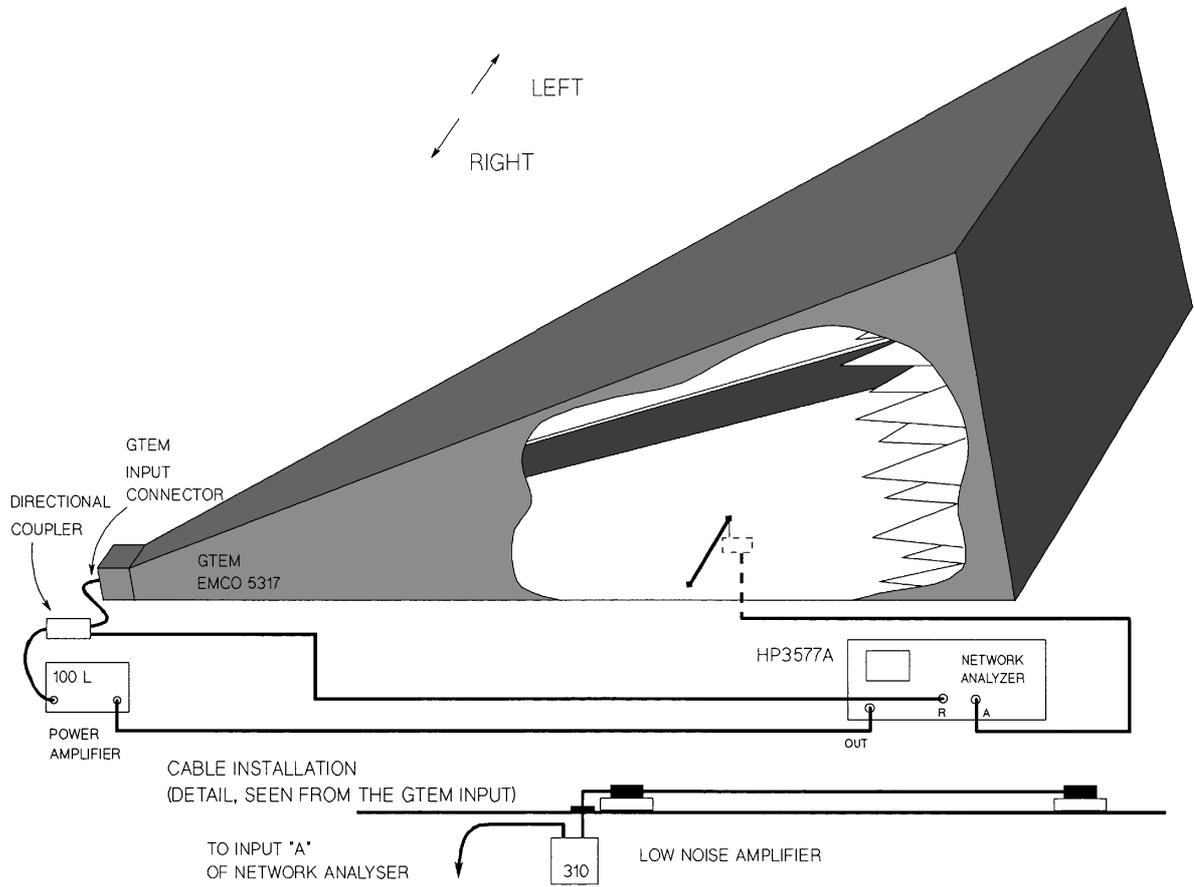


Fig. 8-38: excitation transversale dans la cellule GTEM.

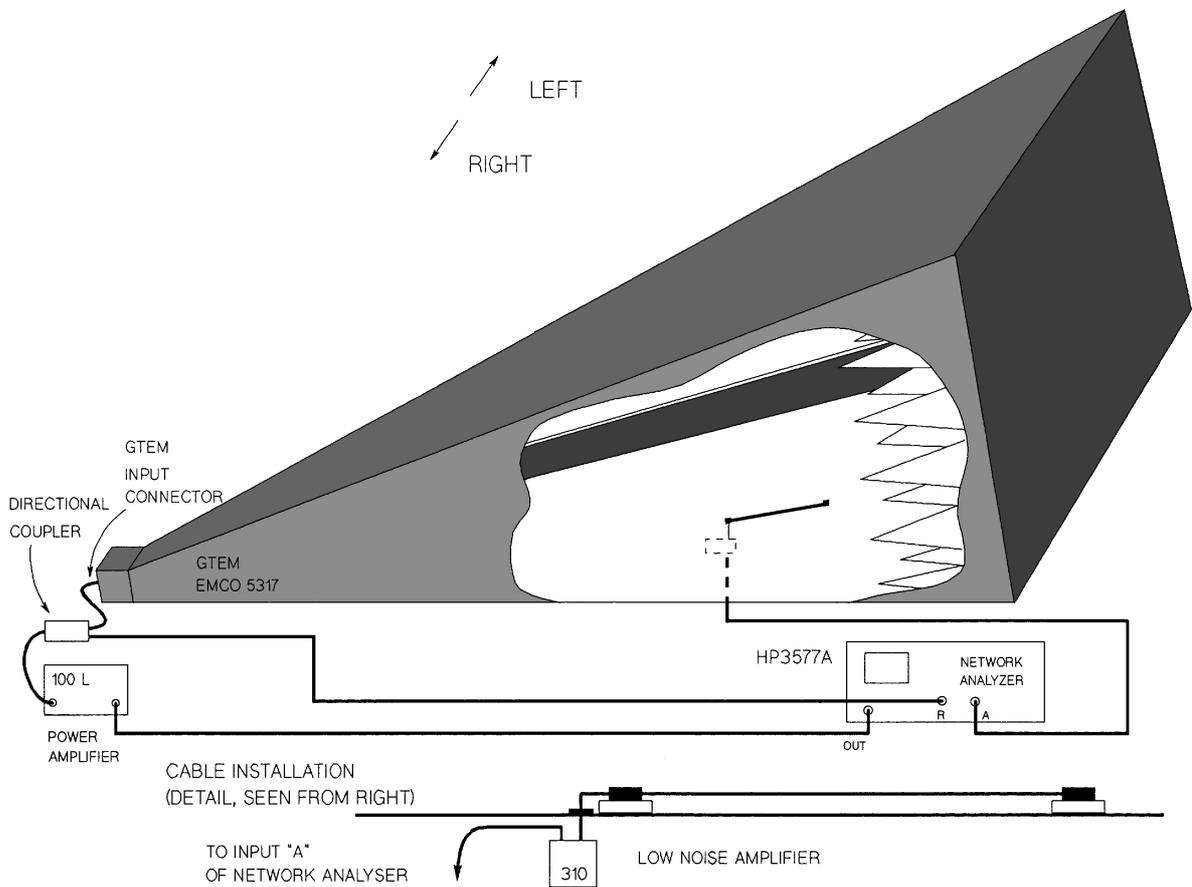


Fig. 8-39: excitation longitudinale dans la cellule GTEM.

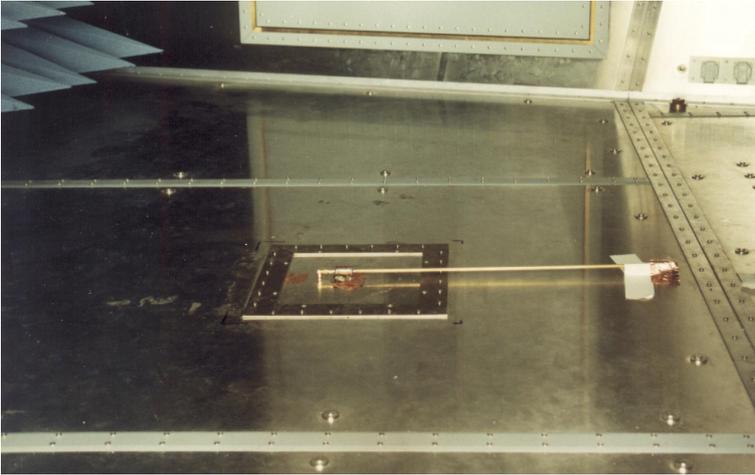


Fig. 8-40: installation d'un échantillon dans la cellule GTEM.

8.7 Résultats expérimentaux en cellule TEM

Nos résultats relatifs à l'échantillon 10 apparaissent de la figure 8-41 à la figure 8-48. Cet échantillon ayant une longueur de 55 cm, nous pouvons considérer qu'il est électriquement court jusqu'à 10 MHz au moins. Jusqu'à cette fréquence au moins, il sera donc légitime de comparer nos résultats expérimentaux avec ceux qui ont été déduits au § 8.5, en utilisant une théorie basée sur une distribution de courant calculée en supposant des conducteurs idéaux. Les figures 8-41 à 8-48 donnent une hauteur effective en[†] dB(m), ce qui correspond à une tension mesurée (avec un instrument d'impédance 50 Ω) à une extrémité de l'échantillon, convenablement normalisée pour 1 V/m de champ appliqué.

La figure 8-47 correspond à la tension obtenue sur un conducteur (mesure côté B), en excitation transversale, avec l'extrémité éloignée en contact avec le plancher. A 1 MHz, nous lisons environ -136 dB(m), soit 5 dB de moins que l'estimation du § 8.5 pour Z_{AT} . La figure 8-48 correspond aux mêmes conditions, sauf que l'extrémité éloignée est isolée du plancher. Cette courbe est pratiquement identique à celle de la figure 8-47, ce qui confirme que nous avons affaire dans les deux cas à l'action du champ magnétique axial. Les figures 8-43 et 8-44 sont les pendants, pour le mode différentiel (mesure côté A), des figures 8-47 et 8-48. Ces figures 8-43 et 8-44 correspondent en effet à des mesures en excitation transversales en mode différentiel, respectivement avec contact, et sans contact avec le plancher. Les niveaux sont bien inférieurs à ceux obtenus dans les figures 8-47 et 8-48, ce qui indique que le champ magnétique axial produit principalement un signal en mode commun sur les conducteurs internes de l'échantillon.

[†] Conformément à la normalisation internationale, dB(m) désigne un décibel par rapport à 1 mètre, et ne doit pas être confondu avec la notation dBm équivalente à dB(mW) désignant un décibel par rapport à 1 mW.

** G10ALC **

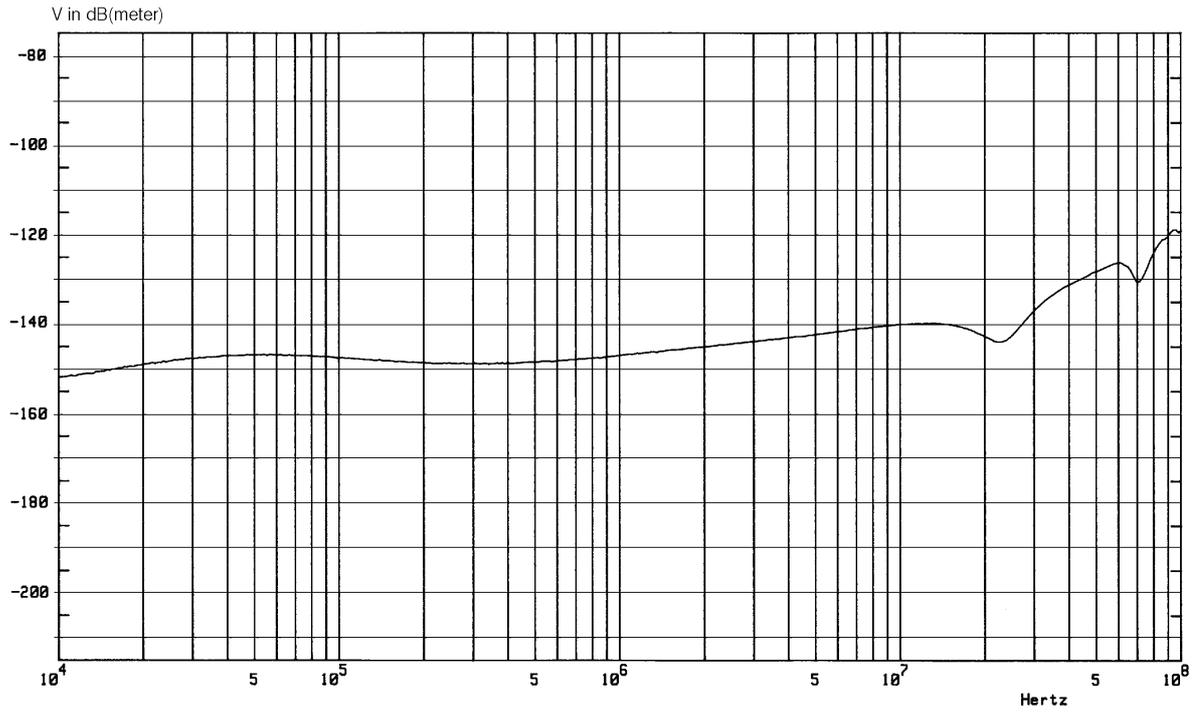


Fig. 8-41: hauteur effective mesurée du côté A, échantillon 10 en excitation longitudinale, côté B relié au plan de masse.

** G10ALI **

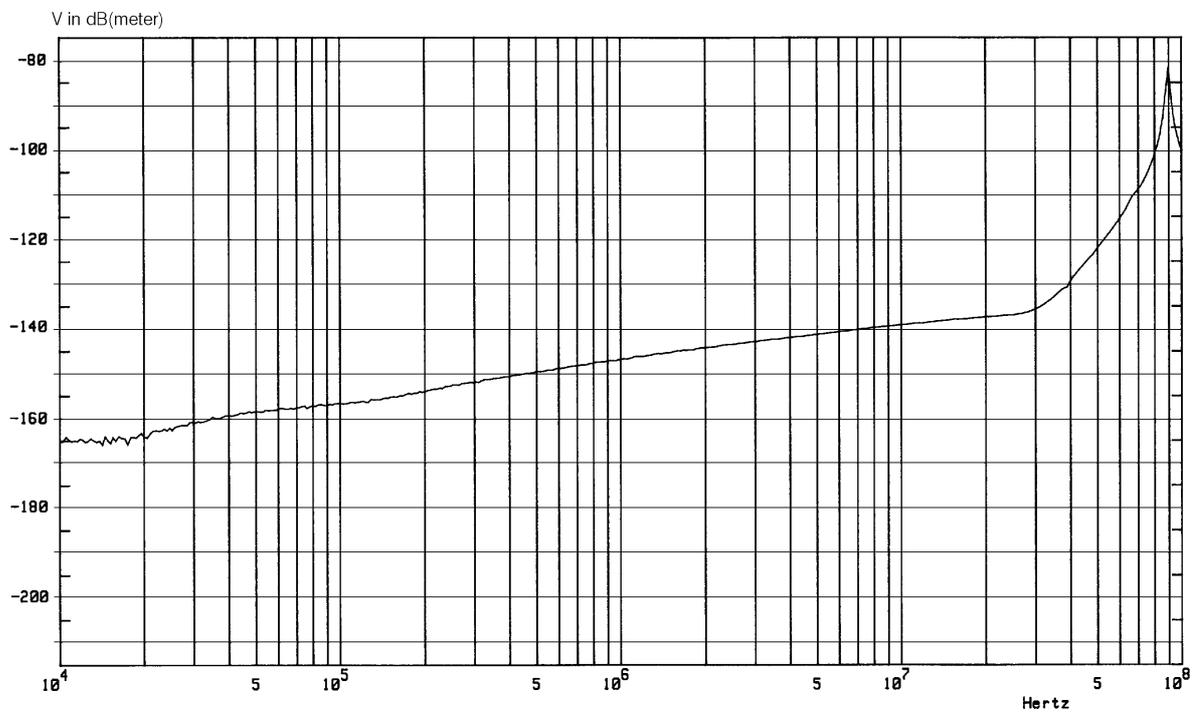


Fig. 8-42: hauteur effective mesurée du côté A, échantillon 10 en excitation longitudinale, côté B isolé du plan de masse.

** G10ATC **

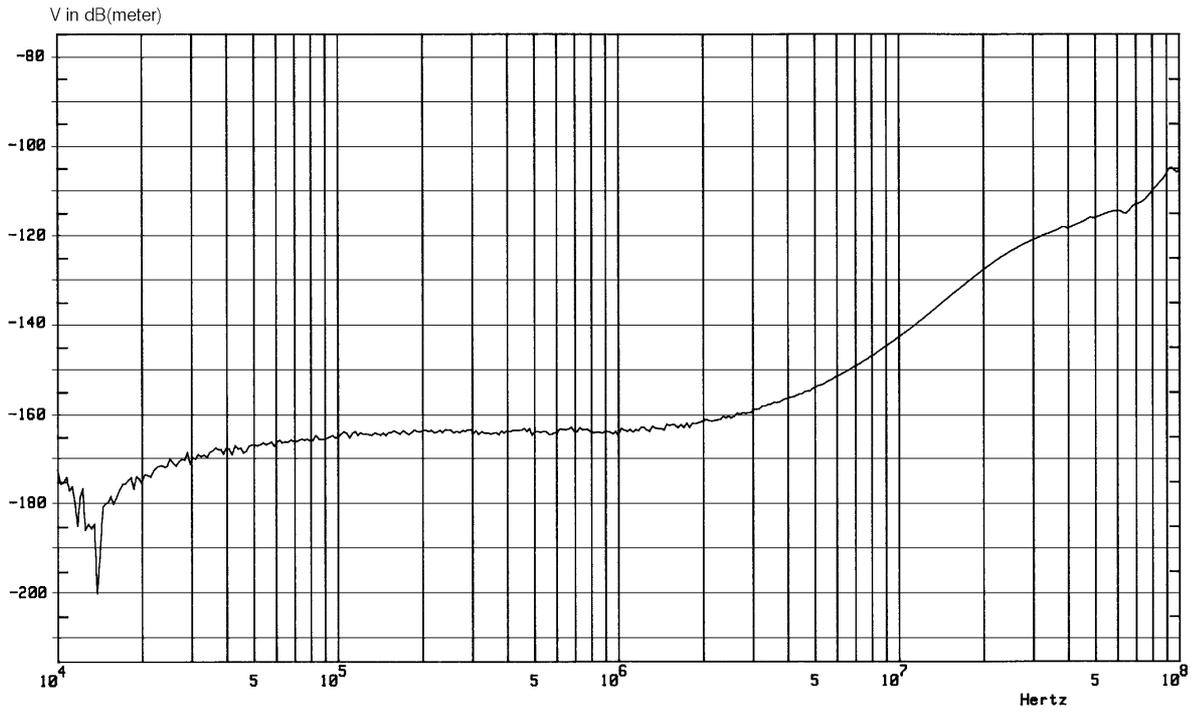


Fig. 8-43: hauteur effective mesurée du côté A, échantillon 10 en excitation transversale, côté B relié au plan de masse.

** G10ATI **

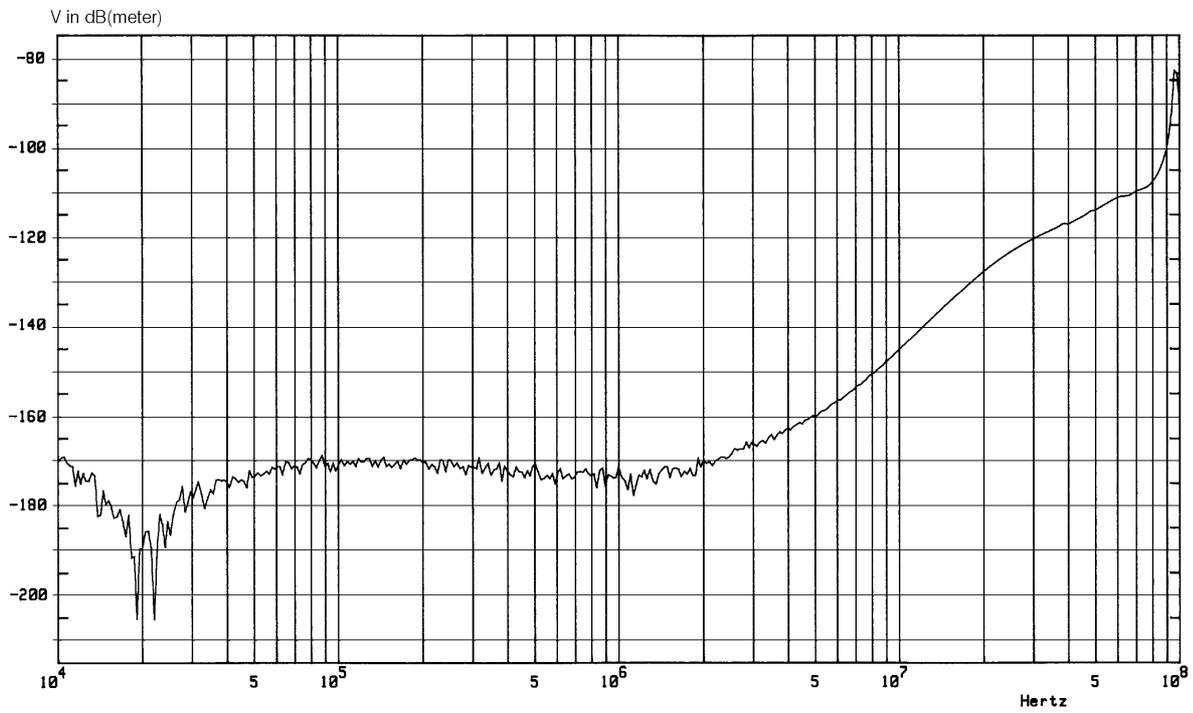


Fig. 8-44: hauteur effective mesurée du côté A, échantillon 10 en excitation transversale, côté B isolé du plan de masse.

** G10BLC **

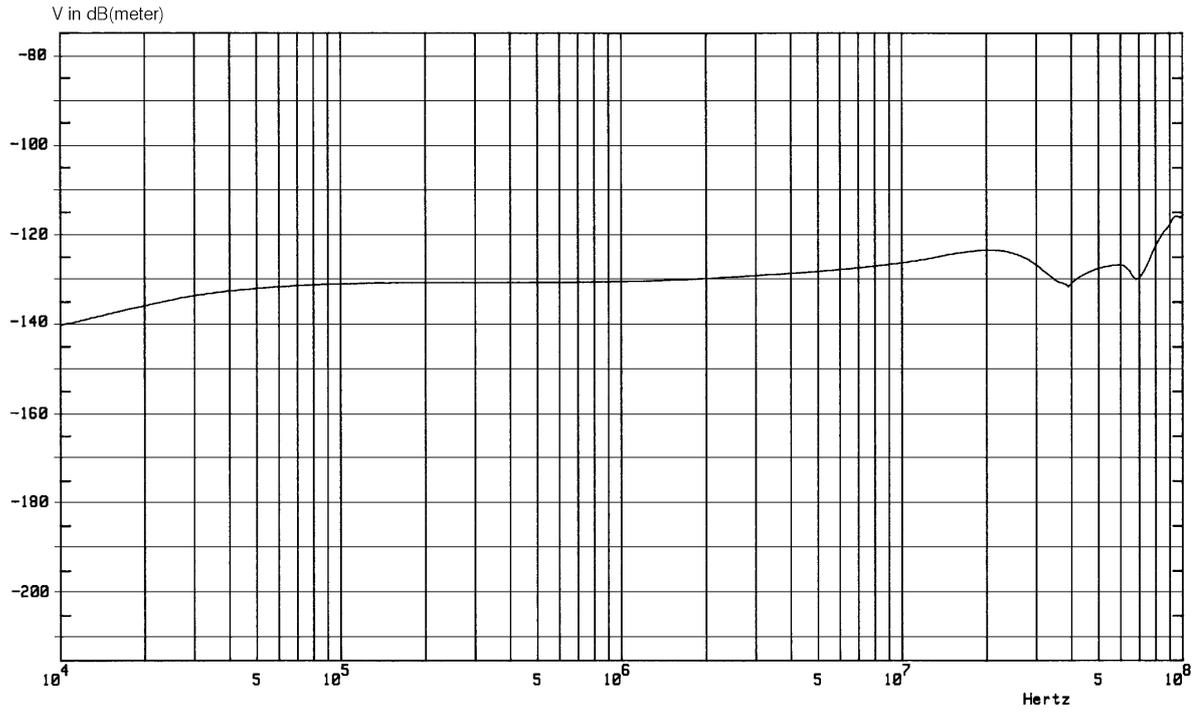


Fig. 8-45: hauteur effective mesurée du côté B, échantillon 10 en excitation longitudinale, côté A relié au plan de masse.

** G10BLI **

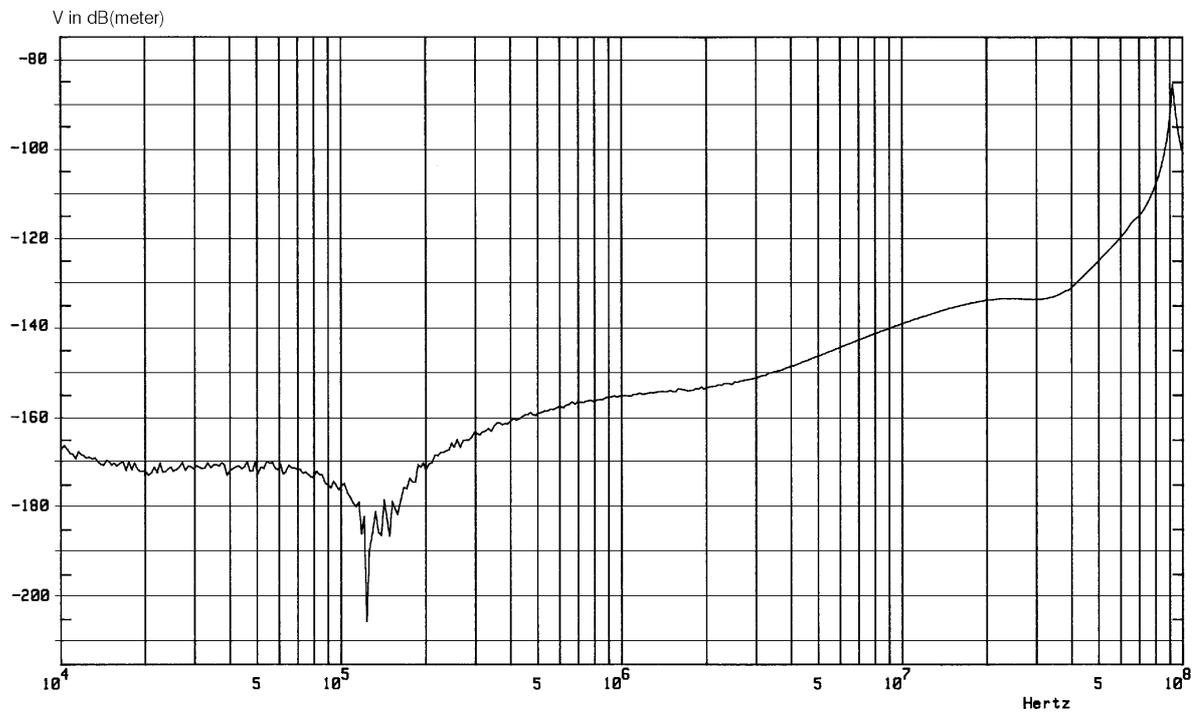


Fig. 8-46: hauteur effective mesurée du côté B, échantillon 10 en excitation longitudinale, côté A isolé du plan de masse.

** G10BTC **

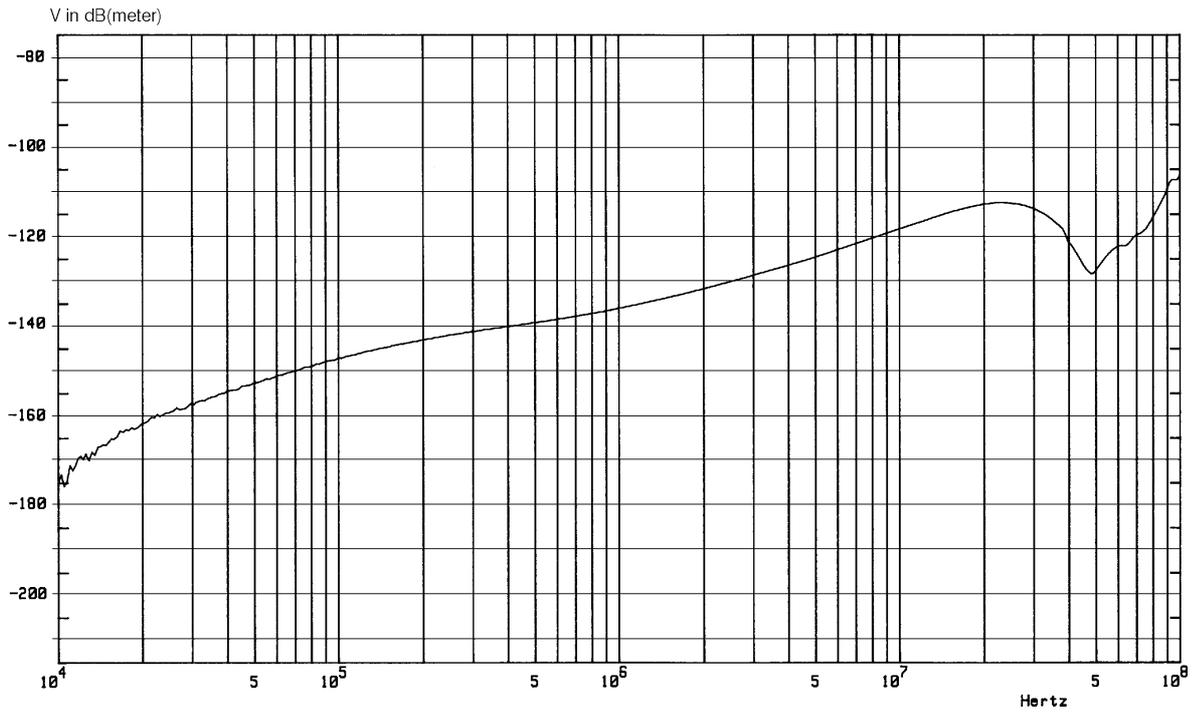


Fig. 8-47: hauteur effective mesurée du côté B, échantillon 10 en excitation transversale, côté A relié au plan de masse.

** G10BTI **

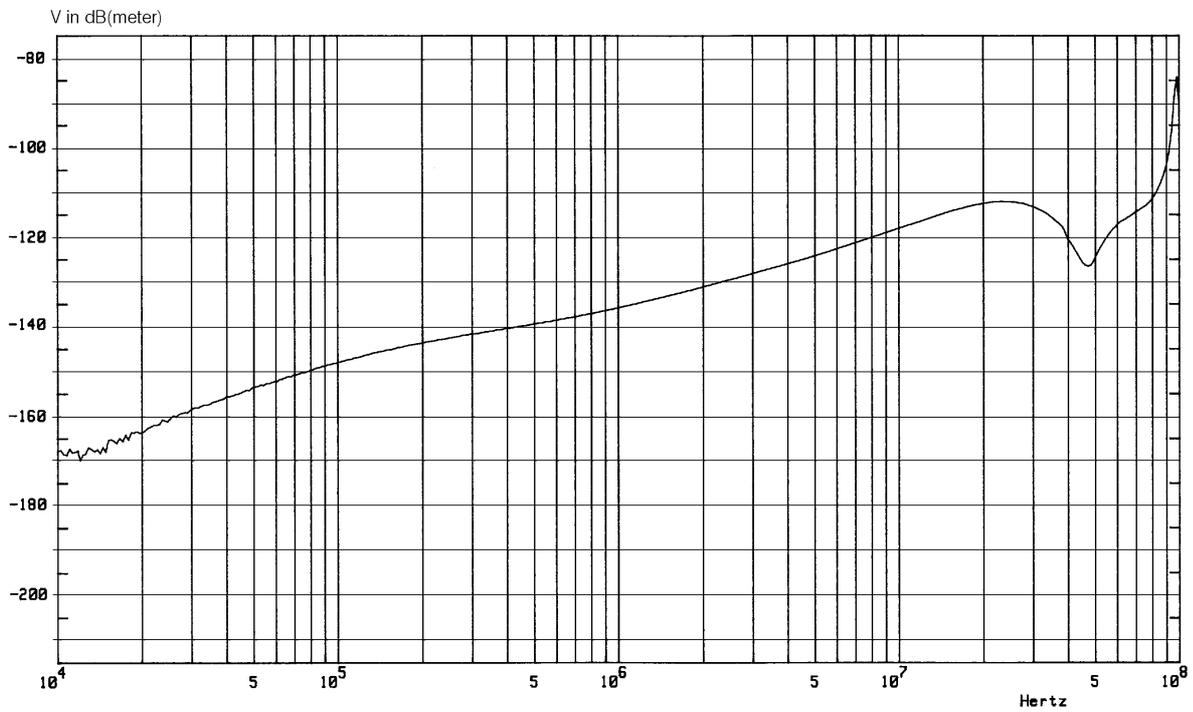


Fig. 8-48: hauteur effective mesurée du côté B, échantillon 10 en excitation transversale, côté A isolé du plan de masse.

La figure 8-45 correspond à la tension obtenue sur un conducteur (mesure côté B), en excitation longitudinale, avec l'extrémité éloignée en contact avec le plancher. A 1 MHz, nous lisons environ -131 dB(m), en concordance avec l'estimation du § 8.5. La figure 8-41 correspond au mode différentiel (mesure côté A) dans les mêmes conditions. A 1 MHz, nous lisons environ -147 dB(m).

La figure 8-46 correspond à la tension obtenue sur un conducteur (mesure côté B), en excitation longitudinale, avec l'extrémité éloignée sans contact avec le plancher. A 1 MHz, nous lisons environ -155 dB(m), soit 3 dB en dessous du majorant déterminé au § 8.5 pour Z_{PT} . La figure 8-42 correspond au mode différentiel (mesure côté A) dans les mêmes conditions. A 1 MHz, nous lisons environ -147 dB(m), comme sur la figure 8-41. Sans contact avec le plancher, nous avons donc plus de signal en mode différentiel qu'en mode commun, ce qui correspond bien à la caractéristique attendue pour Z_{PT} .

Ceci implique aussi, qu'à 1 MHz, la valeur obtenue en mode différentiel n'est pas l'effet de Z_T en mode différentiel, pour lequel la valeur attendue est -131 dB(m) $- 26$ dB = -157 dB(m), mais bien un effet de Z_{PT} en mode différentiel, d'où l'égalité des valeurs lues sur les figures 8-41 et 8-42. Ceci montre que la prise en compte de Z_{PT} est très importante.

Deux constatations mettent d'autre part en évidence que l'impédance de transfert axial joue aussi un rôle très important :

- la comparaison des figures 8-45 et 8-47 montre que, pour les mesures sur un conducteur (mesure côté B), à partir de 2,8 MHz la réponse de l'échantillon est plus forte dans l'orientation transverse que dans l'orientation longitudinale, lorsque le côté opposé est en contact avec le plancher ;
- lorsque le côté opposé n'est pas en contact avec le plancher, la comparaison des figures 8-46 et 8-48 montre que, pour les mesures sur un conducteur, la réponse de l'échantillon est plus forte dans l'orientation transverse que dans l'orientation longitudinale, sur tout l'intervalle 100 kHz à 10 MHz.

Notons enfin que, dans les résultats présentés sur la figure 8-48, les ordres de grandeurs des différentes contributions sont telles qu'il n'y a pas à redouter de contribution autre que celle de Z_{AT} . Nous disposons donc, pour l'échantillon 10, d'un moyen plus précis que les mesures locales des § 8.3.4 et § 8.4.3 pour déterminer Z_{AT} . Il donne $Z_{AT} = -91$ dB(Ω) à 100 kHz, $Z_{AT} = -78$ dB(Ω) à 1 MHz et $Z_{AT} = -61$ dB(Ω) à 10 MHz.

8.8 Conclusion

Avec des mesures locales, des échantillons de câble ont été caractérisés pour le couplage de type 1 (ce qui est classique), pour le couplage de type 2 (ce qui est moins classique), et pour le couplage de type 5 (ce qui est nouveau). Des échantillons ont également été caractérisés pour le couplage de type 4, mais ces résultats demanderaient à être confirmés par des mesures selon une méthode différente, ou par un calcul. Pour le couplage de type 3, la caractérisation de nos échantillons par des mesures locales s'est avérée imprécise, du fait d'une interférence importante avec le couplage de type 5.

Les résultats obtenus pour l'illumination globale d'un échantillon de câble multiconducteur écranté dans une cellule GTEM, mettent en évidence que la prise en compte des couplages de type 3 et de type 5 est indispensable pour rendre compte des phénomènes observés. Quantitativement, ces résultats correspondent bien à ce qui pouvait être déduit de la caractérisation de l'échantillon par des mesures locales, pour les couplages de type 1 et de type 5. Pour le couplage de type 3, l'illumination globale permet de corriger les résultats des mesures locales, car le signal obtenu en excitation transversale avec l'extrémité éloignée isolée n'est manifestement pas significativement influencée par les couplages de type 1 et 5.

Pour le câble à six conducteurs internes étudié, de diamètre extérieur voisin de 5,7 mm, doté d'un écran à simple tresse, nous avons obtenu les résultats suivants :

- son impédance linéique de transfert Z_T est approximativement indépendante de la fréquence de 0 Hz à 1 MHz, et son module γ est voisin de $-37 \text{ dB}(\Omega/\text{m})$;
- son coefficient de couplage électrique radial ζ_R est indépendant de la fréquence de 0 Hz à 10 MHz, sans dimension et voisin de -69 dB ;
- son impédance de transfert axial Z_{AT} est croissante en fonction de la fréquence jusqu'à 10 MHz et son module est voisin de $Z_{AT} = -78 \text{ dB}(\Omega)$ à 1 MHz ;
- son admittance de transfert parallèle Y_{PT} a une période voisine de 73 mm et une norme voisine de $-173 \text{ dB}(S)$ à 1 MHz (cette valeur étant toutefois à confirmer) ;
- son impédance de transfert parallèle Z_{PT} a une période voisine de 73 mm et une norme croissante en fonction de la fréquence jusqu'à 10 MHz et voisine de $-68 \text{ dB}(\Omega)$ à 1 MHz.

Ces valeurs peuvent probablement être utilisées comme ordre de grandeur applicable à des câbles similaires. Raisonner sur des ordres de grandeur permettra de déterminer quels sont les types de couplage pouvant intervenir dans un problème donné.

Lors des expériences, un échantillon de câble artificiel (l'échantillon 14) a été utilisé. Il apparaît qu'il est bien moins sensible au couplage de type 1 que l'échantillon du câble réel (l'échantillon 10) à partir duquel il a été fabriqué, et qu'il est bien plus sensible aux couplages de type 3 et de type 5. Nous en déduisons qu'il n'y a *a priori* pas de corrélation entre les performances d'un même câble pour les différents types de couplage.

De tout ceci, nous concluons que nous avons pu constater, entre autres, que l'expérience prouve qu'il est important de considérer différents types de couplages dans les problèmes de CEM où interviennent des câbles multiconducteurs écrantés.

Conclusion générale

L'idée de base des travaux présentés dans cette thèse est que la caractérisation d'un câble coaxial présentant une symétrie de révolution parfaite, à l'aide de deux paramètres complexes dépendant de la fréquence, ne peut être directement transposée à des câbles ne présentant pas la symétrie de révolution. Cette idée simple nous a permis, en nous appuyant sur des considérations de symétrie, de postuler qu'il était en première approximation suffisant de retenir cinq principaux types de couplage pour caractériser le comportement d'un câble multiconducteur blindé soumis à l'action de sources extérieures.

Pour justifier cette idée et élaborer une approche théorique solide, nous avons construit une classification des réponses d'un écran généralisé cylindrique excité par des sources extérieures, puis une classification des excitations possibles. Sur la base de cette dernière classification, nous avons pu définir rigoureusement la matrice d'écrantage d'un écran cylindrique, et les sources de tension et de courant équivalentes aux champs dans le cas d'un câble multiconducteur blindé. Nous avons ainsi obtenu une démonstration de ce qu'utiliser les cinq principaux types de couplage correspond à ne retenir que l'effet des premières excitations standards sur le câble. En utilisant la réciprocité, nous avons constaté que cette méthode de caractérisation nous permettait de déterminer l'émission d'un écran cylindrique ou d'un câble par un développement en ondes cylindriques, à partir d'expressions locales.

Ces outils théoriques nous ont permis, lorsque les paramètres caractérisant un câble écranté pour cinq principaux types de couplage sont connus, de déterminer, dans quelques configurations particulières d'une section électriquement courte de câble, sa réponse lorsqu'elle est soumise à une excitation extérieure, ou bien son émission lorsque ses conducteurs internes sont excités. Cette théorie mériterait d'être davantage développée dans diverses directions, parmi lesquelles :

- le traitement de problèmes d'action des champs extérieurs dans des configurations plus complexes,
- le traitement de problèmes d'émission dans des configurations plus complexes,
- le traitement de problèmes de câbles électriquement longs,
- l'introduction d'une approche probabiliste pour suppléer au caractère incomplet des données dans un problème réel, dans le but de déterminer un majorant raisonnable de l'interaction,
- le calcul des paramètres de couplage pour les couplages de types 3, 4, et 5, pour des structures classiques de câble.

Ce dernier thème ouvre un champ d'investigation particulièrement vaste, puisqu'il nécessite de compléter les modèles de câble existants, évoqués dans l'introduction. Pour les câbles à tresse par exemple, il faudrait vraisemblablement prendre en compte, d'une part les différents phénomènes de couplage (diffusion, diffraction par les ouvertures et marsouinage), et d'autre part la répartition des conducteurs internes.

Sur le plan expérimental, nous avons procédé à des mesures locales et à des mesures globales, qui nous ont notamment permis de déterminer les modules (pour les couplages de type 1, 2 et 3) et les normes (pour les couplages de type 4 et 5) des paramètres caractérisant les performances d'écrantage d'un câble multiconducteur pourvu d'un écran à simple tresse, à savoir :

- pour le couplage de type 1, l'impédance linéique de transfert Z_T ;
- pour le couplage de type 2, le coefficient de couplage électrique radial ζ_R ;
- pour le couplage de type 3, l'impédance de transfert axial Z_{AT} ;
- pour le couplage de type 4, l'admittance de transfert parallèle Y_{PT} ;
- pour le couplage de type 5, l'impédance de transfert parallèle Z_{PT} .

En outre, les essais d'illumination globale nous ont permis de mettre en évidence une configuration précise dans laquelle nous avons montré que les couplages de type 3 et de type 5 jouaient un rôle aussi important que le couplage de type 1, auquel se limitent encore de nombreuses analyses.

Dans les exemples théoriques de mise en oeuvre de la théorie des cinq principaux types de couplage, traités au chapitre 6, nous nous sommes limités à des sections électriquement courtes de câble, car elles permettent des calculs relativement simples. De façon cohérente, sur le plan expérimental, nous ne nous sommes intéressés qu'à ce qui se passe en-dessous de 10 MHz, de façon à pouvoir utiliser des instruments faciles à réaliser, et aussi pour que l'interprétation des résultats ne soit pas délicate, donc incertaine. Ce parti-pris en faveur des basses fréquences peut également être justifié par la considération suivante : les couplages exotiques (pour reprendre la dénomination du § 1.2) concernent plutôt les câbles ne respectant pas la symétrie de révolution, qui ne sont le plus souvent utilisés qu'avec des signaux dont le spectre ne dépasse pas 10 MHz, quoique certaines applications actuelles comportent des spécifications atteignant ou dépassant 100 MHz pour des câbles multipaires avec un blindage global, destinés aux réseaux locaux.

Cependant, il apparaît que, lorsque les fréquences sont suffisamment élevées pour que les dimensions transversales du câble ne soient pas très petites devant la longueur d'onde, la prise

en compte de la variation, en fonction de l'azimut, des densités de charge et de courant sur l'écran, pourrait être essentielle. Ainsi, Hoeft a formulé l'hypothèse [57] qu'il était possible que les couplages exotiques jouent un rôle dans la décroissance rapide de l'efficacité de blindage des câbles souvent observée en chambre à brassage de modes, au-dessus de 10 GHz.

Nos résultats indiquent également qu'il pourrait être intéressant de réexaminer l'interprétation des résultats de mesure d'impédance linéique de transfert et/ou d'admittance linéique de transfert obtenus dans des dispositifs de mesure ne respectant pas la symétrie de révolution, par exemple en utilisant une cellule TEM, ou selon la méthode de l'injection filaire [30]. Dans ces cas en effet, les couplages exotiques interviennent *a priori*, alors que l'analyse traditionnelle de ces méthodes de mesure ne les prend pas en compte.

Pour obtenir qu'un appareil, un système ou une installation présentent des caractéristiques de compatibilité électromagnétique convenables, une méthode de travail basée sur des raisonnements quantitatifs est souhaitable, sur le plan technique comme sur le plan économique. Dans une telle méthode, les caractéristiques des câbles sont particulièrement importantes [50]. Les résultats présentés dans cette thèse permettent de progresser dans le domaine des calculs pour la compatibilité électromagnétique, lorsque des câbles écrantés doivent être pris en compte. Il reste cependant beaucoup de travail à effectuer pour que les concepteurs puissent les exploiter facilement. Il leur faudrait en effet disposer de données appropriées pour les différents types de câbles, et d'outils capables d'effectuer les calculs nécessaires.

Notons enfin que le champ d'application de la théorie présentée dans cette thèse ne se limite pas aux câbles, puisque les écrans cylindriques ont été abordés de façon générale. Par exemple, l'immunité des aéronefs aux champs forts de fréquences inférieures à 30 MHz est aujourd'hui parfois traitée comme la caractérisation d'un câble coaxial, en se limitant à l'effet du courant axial [60], car les essais correspondants sont bien moins coûteux que des mesures en espace libre. Il serait intéressant d'étudier comment ces techniques d'essais pourraient être adaptées pour prendre en compte d'autres types de couplage, et l'amélioration de la détermination de l'immunité qui serait ainsi obtenue.

Bibliographie

[1] J.C. MAXWELL

A Treatise on Electricity and Magnetism, Clarendon Press, 1891, Unabridged Third Edition, Volume 1 and 2 republished by Dover Publications, Inc, 1954.

[2] S.A. SCHELKUNOFF

"The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shields", *Bell System Technical Journal*, vol. 12, Oct. 1934, pp. 532-579.

[3] J.A. STRATTON

Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Book Company, 1941.

[4] H.A. BETHE

"Theory of Diffraction by Small Holes", *The Physical Review*, vol. 66., No. 7 and 8, Oct. 1 and 15, 1944, pp. 163-182.

[5] P.M. MORSE, H. FESHBACH

Methods of Theoretical Physics, Part I, McGraw-Hill Book Company, 1953.

[6] H. KADEN

Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik, Springer-Verlag, 1959.

[7] R.F. HARRINGTON

Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, Inc, 1961.

[8] E. DURAND

Electrostatique — Tome I — Les Distributions, Masson, 1964.

[9] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN

Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover, 1965.

[10] E. DURAND

Electrostatique — Tome II — Problèmes généraux — Conducteurs, Masson, 1966.

[11] R.C. WREDE

Introduction to Vector and Tensor Analysis, John Wiley and Sons, Inc, 1963, republished by Dover Publications, Inc, 1972.

[12] F.W. GROVER

Inductance Calculations, special edition prepared for the Instrument Society of America, Dover Publications Inc., 1973.

[13] S. FRANKEL :

"Terminal Response of Braided-Shield Cables to External Monochromatic Electromagnetic Fields", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. EMC-16, No. 1, February 1974, pp. 4-16.

[14] E.F. VANCE :

"Shielding Effectiveness of Braided-Wire Shields", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. EMC-17, No. 2, May 1975, pp. 71-77.

[15] K.S.H. LEE, C.E. BAUM :

"Application of Modal Analysis to Braided-Shield Cables", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. EMC-17, No. 3, August 1975, pp. 159-169.

[16] D.E. MEREWETHER, F. EZELL

"The effect of Mutual Inductance and Mutual Capacitance on the Transient Response of Braided Coaxial Cables", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC 18, No. 1, Feb. 1976, pp. 15-20.

[17] J. BASS

Cours de Mathématiques — Tome I, Masson, 1978.

[18] G. FRANCESCHETTI :

"Fundamentals of Steady-State and Transient Electromagnetic Fields in Shielding Enclosures", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. EMC-21, No. 4, November 1979, pp. 335-348.

[19] R. DEHEUVELS

Formes quadratiques et groupes classiques, Presses Universitaires de France, 1981.

[20] F. RODDIER

Distributions et transformation de Fourier, McGraw-Hill, 1981.

[21] B. DÉMOULIN :

Étude de la pénétration des ondes électromagnétiques à travers des blindages homogènes ou des tresses à structures coaxiales, Thèse d'État, Lille 1981.

[22] B. DÉMOULIN, P. DEGAUQUE, M. CAUTERMAN :

"Shielding effectiveness of braids with high optical coverage", *Proceedings of the 4th International Zurich Symposium and Technical Exhibition on EMC*, March 1981, pp. 491-495.

[23] A. TSALIOVICH :

"The Transfer Impedance Test Clamp - Improvements in Electronic Cable Shield Effectiveness Measurement Techniques", *Proceedings of the 1982 IEEE International Symposium on EMC*, Santa Clara, September 1982, pp. 342-347.

[24] L.O. HOEFT, J. HOFSTRA :

"A simple technique for measuring transfer admittance/capacitance", *Proceedings of the 1984 IEEE International Symposium on EMC*, Tokio, October 1984, pp. 835-837.

[25] IEC Publication 96-1, *Radio-frequency cables, part 1 : General requirements and measuring methods*, CEI 1986.

[26] B. DEMOULIN, S. EL ASSAD, P. DEGAUQUE

"Analysis of the Behavior of a Two-Wire Shielded Line in a Disturbing Environment", *Proceedings of the 7th International Zurich Symposium and Technical Exhibition on EMC*, 3-5 March, 1987, pp. 181-185.

[27] B. DEMOULIN, P. DEGAUQUE

"Le blindage des câbles : des paramètres physiques qui influencent leur efficacité", *Revue Générale d'Electricité*, No. 6, Juin 1987, pp. 7-13.

[28] E.F. VANCE

Coupling to shielded cables, R.E.Krieger Publishing Company, 1987.

[29] L. HALME, B. SZENTKUTI

"The background for electromagnetic screening measurements of cylindrical screens", *Bulletin technique PTT*, No.3, PTT suisses, Berne, 1988.

- [30] B. EICHER, Ch. STAEGER, B. SZENTKUTI, H. FAHRNI
"Simple and accurate screening measurements on RF-cables up to 3 GHz", *Bulletin technique PTT*, No.4, PTT suisses, Berne, 1988.
- [31] T. KARLSSON,
"The Topological Concept of a Generalized Shield", *Interaction Notes*, Note 461, EMP memo 801, FOA Report C 30488-4.2, April 1988.
- [32] L.O. HOEFT, J. HOFSTRA :
"Measured Electromagnetic Shielding Performances of Commonly Used Cables and Connectors", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 30, No. 3, August 1988, pp. 260-275.
- [33] P. DEGAUQUE, J. HAMELIN
Compatibilité électromagnétique, Dunod, 1990.
- [34] E.P. FOWLER, L.K. HALME
"State of the art in cable screening measurements", *Proceedings of the 9th International Zürich Symposium on EMC*, March 1991, pp. 151-158.
- [35] J. VAN BLADEL
Singular Electromagnetic Fields and Sources, Clarendon Press, 1991.
- [36] R. E. COLLIN
Field Theory of Guided Waves, Second Edition, IEEE Press, 1991.
- [37] Demande de brevet français 93 10903 du 14/09/93. *Dispositif pour la caractérisation des imperfections des écrans de câble avec écran par application d'un champ magnétique variable transverse à l'axe du câble*. Inventeurs: Frédéric Broydé & Evelyne Clavelier.
- [38] Demande de brevet français 93 13492 du 09/11/93. *Dispositif pour la caractérisation des imperfections des écrans de câble avec écran par application d'un champ magnétique variable parallèle à l'axe du câble*. Inventeurs: Frédéric Broydé & Evelyne Clavelier.
- [39] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :
"Comparison of Coupling Mechanisms on Multiconductor Cables", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 35, No. 4, November 1993, pp. 409-416.

[40] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER, D. GIVORD, P. VALLET :

"Discussion of the Relevance of Transfer Admittance and Some Through Elastance Measurements Results", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 35, No. 4, November 1993, pp. 417-422.

[41] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Complément à la théorie du couplage champ à câble : définition des cinq modes de couplage et mesures des impédances de transfert axiale et parallèle", *Actes du 7e colloque international sur la compatibilité électromagnétique*, Toulouse 2-3-4 mars 1994, pp. 463-470.

[42] *Etude des cinq types de couplage sur les liaisons multifilaires avec écran — Définition des essais en excitation pure et en cellule GTEM*, document Excem 94052101A (document livré à l'Etablissement Technique Central de l'Armement), mai 1994.

[43] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Measurement of the parallel and axial transfer impedances : theory, practical methods, and results", *Proceedings of EUROEM 94*, International Symposium on Electromagnetic Environments and Consequences, Bordeaux 30 mai-4 juin 1994, pp. 1072-1080.

[44] *Etude des cinq types de couplage sur les liaisons multifilaires avec écran — Rapport final sur la campagne d'essais 1994*, document Excem 94052102A (document livré à l'Etablissement Technique Central de l'Armement), juillet 1994.

[45] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Parallel and axial Transfer Impedances : theoretical summary and local measurement method", *Proceedings of the 11th International Zürich Symposium on EMC*, 7-9 March 1995, pp. 501-506.

[46] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Conséquences pratiques des avancées récentes en matière d'analyse des couplages aux câbles avec écran", *Actes des 5ièmes journées d'études sur la Compatibilité Electromagnétique*, SEE Grenoble, 21 juin 1995, communication 2B.

[47] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Definition, Relevance and Measurements of the Parallel and Axial Transfer Impedances", *Proceedings of the 1995 IEEE International Symposium on EMC*, Atlanta, August 1995, pp. 490-495.

[48] N. MOHAMUDALLY :

Etudes des fuites électromagnétiques introduites sur le raccordement des câbles blindés et du couplage produit par une composante de champ perpendiculaire à la section des câbles coaxiaux, Thèse présentée à l'Université des sciences et technologies de Lille, 11 Janvier 1996.

[49] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Progrès sur la spécification et la modélisation des liaisons blindées", *Actes du colloque CEM 1996*, Lille, 3-5 septembre 1996, pp. 89-94.

[50] F. BROYDÉ :

"Les solutions pour la protection", *Actes de la journée de conférences plénières du colloque CEM 1996*, Lille, 3-5 septembre 1996, pp. 42-49.

[51] F.M. TESCHE, M.V. IANOZ, T. KARLSSON :

EMC Analysis Methods and Computational Models, John Wiley & Sons, Inc, 1997.

[52] E.W. WEISSTEIN

CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, CRC Press, 1999.

[53] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"The Basis of a Theory for the Shielding by Cylindrical Generalized Screens", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 42, No. 4, November 2000, pp. 414-426.

[54] P.E. ATLAMAZOGLU, H.T. ANASTASSIU, D.I. KAKLAMANI

"Application of Literate-Programming Principles for the Description of a *FORTRAN 90* Extension to Quaternion Arithmetic" *IEEE Antenna and Propagation Magazine*, Vol. 43, No. 4, Aug. 2001, pp. 104-114.

[55] S.-C. PEI, J.-J. DING, J.-H. CHANG

"Efficient Implementation of Quaternion Fourier Transform, Convolution, and Correlation by 2-D Complex FFT", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 11, Nov. 2001, pp. 2783-2797.

[56] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Correction to « The Basis of a Theory for the Shielding by Cylindrical Generalized Screens »", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 44, No. 3, August 2002, p. 490.

[57] L.O. HOEFT :

"A Simplified Relationship Between Surface Transfer Impedance and Mode Stirred Chamber Shielding Effectiveness of Cables and Connectors", *Records of the EMC Europe 2002 International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Sorrento, Italy, September 2002, pp. 441-446.

[58] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Characterization of a Cylindrical Screen for External Excitations and Application to Shielded Cables", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 44, No. 4, Nov. 2002, pp. 580-588.

[59] H.T. ANASTASSIU, P.E. ATLAMAZOGLU, D.I. KAKLAMANI

"Application of Bicomplex (Quaternion) Algebra to Fundamental Electromagnetics: A Lower Order Alternative to the Helmholtz Equation" *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, Vol. 51, No. 8, Aug. 2003, pp. 2130-2136.

[60] M. CANTALOUBE, A. SAIDANI :

"Evaluation de la susceptibilité fonctionnelle d'un système d'armes aux champs Radio-Radar (10 kHz - 18 GHz)", *Actes du 12^{ème} Colloque International CEM 04*, 16-18 mars 2004, Toulouse, pp. 341-344.

[61] F. BROYDÉ, E. CLAVELIER :

"Hypercomplex Amplitudes in Cylindrical Problems", à paraître.

Annexe A : Notions sur les quaternions

A.1 Définitions usuelles

Les *quaternions réels* [19, § VIII.6], aussi appelés *quaternions de Hamilton*, ou *nombre hypercomplexes* [52, p. 1493], seront simplement appelés *quaternions* dans cette Annexe. L'ensemble des quaternions, muni de l'addition et de la multiplication est un corps non-commutatif. C'est aussi une \mathbb{R} -algèbre de dimension 4. La base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel des quaternions est notée $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, avec

$$\mathbf{i}^2 = -1 \quad \mathbf{j}^2 = -1 \quad \mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} \quad (\text{A-1})$$

d'où l'on déduit que $\mathbf{k}^2 = -1$, que $\mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}$ et que $\mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$.

La \mathbb{R} -algèbre des quaternions est isomorphe à une sous-algèbre de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à éléments dans \mathbb{C} , considéré comme une \mathbb{R} -algèbre de dimension 8. Un tel isomorphisme f est par exemple celui qui est défini par [17, § 5-13] [52, p. 1494] :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & f(\mathbf{i}) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{j}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & f(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

mais d'autres choix sont possibles. Cet isomorphisme permet de se convaincre facilement de l'existence d'une \mathbb{R} -algèbre vérifiant (A-1), et de s'assurer que c'est un corps.

Identifions \mathbb{R} avec la sous algèbre engendrée par le quaternion 1. Les éléments de \mathbb{R} commutent avec tous les autres quaternions. Manifestement, les trois plans $\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R}$, $\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ sont des corps commutatifs isomorphes à \mathbb{C} .

Dans le corps de quaternions, l'exponentielle est définie, de façon habituelle, par une série. Cependant, nous devons toujours garder à l'esprit que, comme pour l'exponentielle des matrices carrées, pour deux quaternions quelconques x et y , $\exp(x+y)$ n'est *a priori* pas égal à $\exp(x).\exp(y)$.

Considérons un quaternion $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$ quelconque, avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Le quaternion conjugué de x est, par définition,

$$\bar{x} = x_1 - x_2 \mathbf{i} - x_3 \mathbf{j} - x_4 \mathbf{k} \quad (\text{A-3})$$

qui vérifie

$$x\bar{x} = \bar{x}x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (\text{A-4})$$

On appelle “norme du quaternion x ” et on note $|x|$ le nombre réel positif $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$, qui correspond simplement à la norme euclidienne de l’espace vectoriel \mathbb{R}^4 . De plus, il est facile de montrer que pour deux quaternions x et y quelconques, nous avons :

$$|xy| = |x| |y| \quad (\text{A-5})$$

Pour tout nombre réel α , nous avons :

$$\left| e^{\mathbf{i}\alpha} \right| = \left| e^{\mathbf{j}\alpha} \right| = \left| e^{\mathbf{k}\alpha} \right| = 1 \quad (\text{A-6})$$

Il est par ailleurs intéressant de noter [5, p. 75] [17, 5-14] que pour tous réels θ, α, β et γ tels que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, nous avons

$$e^{\theta(\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma)} = \cos\theta + \sin\theta(\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma) \quad (\text{A-7})$$

qui est évidemment un quaternion de norme égale à 1. Clairement, tout quaternion est le produit de sa norme par un quaternion de la forme (A-7). Nous constatons que cette écriture est sensiblement plus lourde que $z = |z| e^{i\theta}$ pour un nombre complexe z . Ce résultat est important car un quaternion de la forme (A-7) représente une rotation de l’espace euclidien de dimension 3, d’angle 2θ autour du vecteur unitaire de coordonnées α, β et γ dans une base orthonormée.

A.2 Définitions et résultats particuliers

En notant $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$ un quaternion quelconque, avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Nous pouvons, pour les besoins du chapitre 3, définir quatre projections utiles :

- la projection $\text{Co}_{\mathbf{i}}$ est la projection sur le plan $\mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$ définie par $\text{Co}_{\mathbf{i}}(x) = x_1 + x_2 \mathbf{i}$,
- la projection $\text{Co}_{\mathbf{j}}$ est la projection sur le plan $\mathbb{R} + \mathbf{j} \mathbb{R}$ définie par $\text{Co}_{\mathbf{j}}(x) = x_1 + x_3 \mathbf{j}$,
- la projection Re sur la droite \mathbb{R} définie par $\text{Re}(x) = \text{Co}_{\mathbf{i}}(\text{Co}_{\mathbf{j}}(x)) = \text{Co}_{\mathbf{j}}(\text{Co}_{\mathbf{i}}(x)) = x_1$ que nous pouvons appeler “partie réelle de”.
- la projection $\text{Im}_{\mathbf{i}}$ sur la droite $\mathbf{i} \mathbb{R}$ définie par $\text{Im}_{\mathbf{i}}(x) = x_2$.

Nous devons maintenant définir deux quaternions conjugués partiels, par

$$\overleftarrow{x} = x_1 - x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} - x_4 \mathbf{k} \quad (\text{A-8})$$

et

$$\overbrace{x}^j = x_1 + x_2 \mathbf{i} - x_3 \mathbf{j} - x_4 \mathbf{k} \quad (\text{A-9})$$

Avec ces notations, nous avons

$$\begin{cases} \mathbf{i} x = x \mathbf{i} \\ \mathbf{j} x = x \mathbf{j} \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

La chapitre 3 donne un rôle particulier au sous-ensemble $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$ des produits d'un élément de $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})$ par un élément de $(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$, dans cet ordre. Tout quaternion $x \neq 0$ de $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$ peut être écrit d'une manière unique

$$x = |x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha} \quad (\text{A-11})$$

où α et β sont deux nombres réels. Cette expression peut aussi s'écrire :

$$x = |x| \left(\begin{array}{l} \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{i} \sin \alpha \cos \beta + \\ + \mathbf{j} \cos \alpha \sin \beta - \mathbf{k} \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right) \quad (\text{A-12})$$

Dans cette thèse, comme indiqué au § 2.3, nous appelons α la phase azimutale du quaternion x , et β sa phase temporelle. Nous pouvons facilement montrer que $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$ est le sous ensemble des quaternions $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$ tels que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $x_1 x_4 = -x_2 x_3$. Ce sous ensemble n'est pas un espace vectoriel, mais ils contient les sous-algèbres $\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R}$, $\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R}$ et $\mathbf{k}\mathbb{R}$. Par conséquent, les sommes et intégrales d'éléments de $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$ que nous rencontrons au chapitre 3 peuvent *a priori* se trouver n'importe où dans le corps de quaternions. Pour tout quaternion s'écrivant sous la forme (A-11) nous avons :

$$\overbrace{x}^i = \overbrace{|x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha}}^i = |x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{-i\alpha} \quad (\text{A-13})$$

$$\overbrace{x}^j = \overbrace{|x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha}}^j = |x| e^{-\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha} \quad (\text{A-14})$$

Ces résultats nous permettent d'écrire les dérivées d'un élément de $(\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R})(\mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = |x| e^{\mathbf{j}\beta} \mathbf{i} e^{i\alpha} = |x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha} \mathbf{i} = x \mathbf{i} = \mathbf{i} \overbrace{x}^j \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = |x| \mathbf{j} e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha} = \mathbf{j} |x| e^{\mathbf{j}\beta} e^{i\alpha} = \mathbf{j} x = x \overbrace{\mathbf{j}}^i \quad (\text{A-16})$$

où nous avons utilisé (A-10). Les équations (A-13) et (A-14) pourraient aussi être utilisées pour modifier (A-15) et (A-16). L'ordre des termes est manifestement important.

Annexe B : Sources induisant une réponse tangentielle donnée

L'objet de cette annexe est d'énoncer et de démontrer le théorème suivant.

Théorème : Soit un écran généralisé parfaitement conducteur, dans le vide. Il est possible de déterminer des sources électromagnétiques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, capables d'induire, sur le bord externe de l'écran généralisé, des courants superficiels et des charges superficielles correspondant à toute réponse tangentielle donnée vérifiant les équations (2-17) et (2-18).

Preuve : Le bord externe étant un bon conducteur électrique, nous avons $i_{VR} = 0$, et les seuls courants possibles sont des courants superficiels sur le bord externe. Les équations (2-17) et (2-18) étant vérifiées, la réponse tangentielle désirée est compatible avec la conservation de la charge. Il est donc, du point de vue de l'électromagnétisme macroscopique, possible de mettre en mouvement, avec des forces non-électromagnétiques, des charges libres du bord externe conducteur de façon à obtenir des courants superficiels et des charges superficielles correspondant à la réponse tangentielle désirée. Ces forces non-électromagnétiques sont équivalentes à un vecteur force électromotrice \mathcal{E} agissant sur les charges superficielles. Comme les courants que nous voulons créer sont superficiels, nous pouvons postuler que \mathcal{E} est tangentiel à la surface de l'écran généralisé. Si l'écran généralisé était un milieu de conductivité finie σ et en présence d'un champ électrique total \mathbf{E} , les courants seraient régis par :

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathcal{E}) \quad (\text{B-1})$$

Mais, dans le milieu infiniment conducteur qui nous intéresse, nous ne pouvons qu'affirmer que $\mathbf{E} + \mathcal{E}$ a une composante tangentielle nulle, ce qui s'écrit, en notant \mathbf{n} le vecteur normal à l'écran généralisé, dirigé vers l'extérieur :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathcal{E} \quad (\text{B-2})$$

cette équation étant applicable sur le bord externe de l'écran généralisé.

Nous notons à présent que l'intervention d'un vecteur force électromotrice agissant sur des charges de l'écran généralisé peut être supprimée en remarquant qu'elle sert à compenser la force due à la composante tangentielle du champ électrique causé par la réponse tangentielle désirée. Cette force électromotrice sert donc à créer une discontinuité de la composante tangentielle du

champ électrique au-dessus du bord externe de l'écran généralisé. Nous savons que cet effet peut également s'obtenir [7, § 1-14] à l'aide d'une distribution superficielle de courant magnétique placée immédiatement au-dessus du bord de l'écran généralisé, de densité surfacique \mathbf{M}_s valant :

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{E} \times \mathbf{n} = -\mathcal{E} \times \mathbf{n} \quad (\text{B-3})$$

Cette densité superficielle de courant magnétique permet donc de produire la réponse tangentielle souhaitée sur l'écran généralisé. Notons que nous aurions pu aussi obtenir ce résultat en utilisant directement le principe d'équivalence [7, § 3.5], comme au § 5.2.

Il nous reste donc à définir une expérience physiquement réalisable permettant de produire une distribution superficielle de courant magnétique de densité surfacique \mathbf{M}_s donnée, à proximité immédiate du bord externe. Une portion d'une distribution superficielle, qui sépare l'espace entre l'écran généralisé et ② le volume à l'extérieur de l'écran généralisé ①, est représentée sur la Figure B-1 au a).

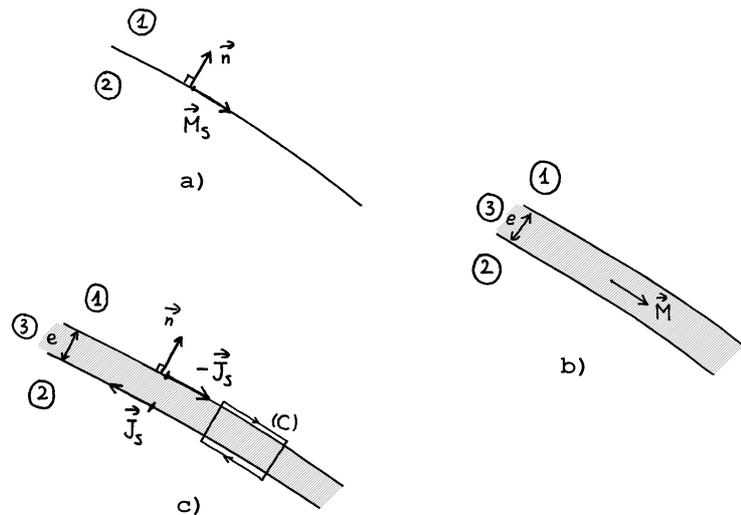


Fig. B-1 : la double couche de courant

Avec les notations habituelles, cette densité surfacique de courant magnétique vérifie [7, § 1-14] :

$$\left[\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)} \right] \times \mathbf{n} = \mathbf{M}_s \quad (\text{B-4})$$

Cette densité surfacique est une limite d'une couche d'épaisseur e , représentée sur la Figure B-1 b), supportant un courant magnétique \mathbf{M} , lorsque e tend vers 0 et que l'amplitude de \mathbf{M} croît de façon convenable. Considérons à présent une double couche de courants électriques superficiels opposés, représentée sur la Figure B-1 c). La double couche sépare les régions ① et

②, avec la région ③ ayant une petite épaisseur e . Donnons au courant sur la couche inférieure la valeur :

$$\mathbf{J}_S = \frac{1}{j\omega \mu_0 e} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_S \quad (\text{B-5})$$

Les relations de passage :

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(3)}] = -\mathbf{J}_S \quad (\text{B-6})$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^{(3)} - \mathbf{H}^{(2)}] = \mathbf{J}_S \quad (\text{B-7})$$

montrent qu'il y a continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} à travers la double couche, qui laisse par ailleurs les composantes normales de \mathbf{H} et \mathbf{E} invariantes, car nous supposons qu'un courant selon \mathbf{n} s'établit pour annuler les charges opposées apparaissant de part et d'autre de la double couche. D'après (B-5) à (B-7), la partie de \mathbf{B} qui va croître en région ③ lorsque nous ferons tendre e vers 0 vérifie :

$$\mathbf{B}^{(3)} \times \mathbf{n} \approx -\frac{1}{j\omega e} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_S \quad (\text{B-8})$$

Ainsi, par application du théorème d'Ampère sur le contour (C) de la Figure B-1 c), et en faisant tendre e vers 0, nous obtenons :

$$\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)} = \lim_{e \rightarrow 0} (-j\omega e \mathbf{B}^{(3)} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{M}_S \quad (\text{B-9})$$

La distribution surfacique \mathbf{M}_S étant d'après (B-3) orthogonale à \mathbf{n} , (B-9) conduit bien à (B-4), ce qui montre que notre double couche de courant électrique superficiel est équivalente à la couche de courant magnétique superficiel. Il est clair que l'on peut, par un montage filaire approprié (idéal, bien sûr), créer un dispositif simulant la double couche de courant superficielle. Même si la précision de cette simulation est pratiquement limitée, nous pouvons parler d'une expérience physiquement réalisable.

Nous avons donc déterminé des sources électromagnétiques dans le volume à l'extérieur de l'écran généralisé, capables d'induire les courants superficiels et les charges superficielles de la réponse tangentielle donnée.

Annexe C : Utilisation des potentiels complexes

C.1 Potentiels et fonction flux dans les problèmes à deux variables

Dans cette thèse, nous traitons fréquemment de problèmes d'électrostatique caractérisés par une invariance par translation selon l'axe Oz. Ces problèmes sont donc à deux variables. Cette annexe traite de leur résolution par l'utilisation de potentiels complexes.

Dans ces problèmes, l'intégrale du potentiel coulombien de la source élémentaire, qui est une distribution uniforme de charge sur une droite parallèle à Oz, appelée monopôle cylindrique, est divergente [8, pp. 191-195]. Il est cependant possible de définir des potentiels $V(x, y)$ dont dérivera le champ électrique $\mathbf{E}(x, y)$ selon

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V \quad (\text{C-1})$$

Un tel potentiel est le potentiel logarithmique, qui, pour la source élémentaire vaut

$$V = -\frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{r_0} \quad (\text{C-2})$$

où p_0 est la densité linéique de charge de la source élémentaire au point de coordonnées (x_0, y_0) , et où r_0 est une longueur arbitraire. De (C-1) nous déduisons immédiatement que la circulation de l'opposé du champ le long d'une courbe reliant deux points A et B est égale à la différence entre les potentiels du point d'arrivée et du point de départ, c'est-à-dire

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_B - V_A \quad (\text{C-3})$$

Pour ce potentiel logarithmique, il existe également une fonction flux F telle que le flux du champ le long d'une courbe reliant deux points A et B est égale à la différence entre les valeurs F au point d'arrivée et au point de départ, c'est-à-dire

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl = F_B - F_A \quad (\text{C-4})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire orthogonal à $d\mathbf{l}$, pointant du côté de la courbe opposé à celui où se trouve le point (x_0, y_0) . Cette fonction flux est multiforme et vaut, dans le demi-plan $x \geq x_0$

$$F = \frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0} \quad (\text{C-5})$$

valeur à laquelle il convient d'ajouter π à chaque fois que l'axe $y = y_0$ est franchi dans le sens trigonométrique. Les résultats que nous venons de donner pour le monopôle cylindrique s'étendent immédiatement à une distribution quelconque de sources élémentaires, par sommation [8, p. 204].

Notons enfin que les courbes $F = \text{constante}$ sont les lignes de champ et sont donc orthogonales aux équipotentielles $V = \text{constante}$.

C.2 Définition du potentiel complexe

Rappelons qu'une fonction est holomorphe en un point $x_0 + iy_0$ de \mathbb{C} si elle est continue en ce point et y admet une dérivée que nous noterons

$$\frac{d\zeta}{dx + idy} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\zeta(x_0 + iy_0 + \lambda) - \zeta(x_0 + iy_0)}{\lambda} \quad (\text{C-6})$$

λ prenant ses valeurs dans \mathbb{C} . Pour éviter toute confusion avec la troisième coordonnée d'espace, nous noterons respectivement $x + iy$ et $dx + idy$ les variables complexes habituellement notées z et dz , respectivement. Il est bien connu que toute fonction analytique ζ vérifie les relations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{C-7})$$

en tout point régulier (où elle est par définition holomorphe), ξ et η étant les fonctions réelles telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\zeta(x + iy) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) \quad (\text{C-8})$$

De ces relations, il résulte que [10, pp. 234-235] [17, § 28-3 et § 28-5], en tout point régulier de la fonction analytique ζ , les fonctions ξ et η vérifient l'équation de Laplace à deux dimensions, c'est-à-dire $\Delta\xi = 0$ et $\Delta\eta = 0$. De plus, les courbes $\xi = \text{constante}$ sont orthogonales aux courbes $\eta = \text{constante}$.

Pour résoudre un problème d'électrostatique qui nous intéresse, nous pouvons utilement définir [10, p. 236] un potentiel complexe ζ qui groupe le potentiel et la fonction flux, par

$$\zeta = V - iF \quad (\text{C-9})$$

et un champ complexe $E_x - iE_y$. On montre que le conjugué du champ complexe vérifie

$$E_x - iE_y = -\frac{d\zeta}{dx + idy} \quad (\text{C-10})$$

C.3 Potentiel complexe des distributions multipôles

Pour le monopôle cylindrique, ou multipôle d'ordre 0, qui est une distribution uniforme de charge sur une droite parallèle à Oz, le potentiel complexe est

$$\zeta = -\frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left[\frac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{r_0} \right] \quad (\text{C-11})$$

où p_0 est la densité linéique de charge du monopôle cylindrique au point de coordonnées (x_0, y_0) et où r_0 est une longueur arbitraire. Cette densité linéique s'appelle aussi le moment du monopôle cylindrique. De cette expression, nous tirons immédiatement que

$$E_x - i E_y = \frac{p_0}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \quad (\text{C-12})$$

Par définition, en approchant deux monopôles cylindriques de moments opposés, nous obtenons, lorsque la distance tend vers zéro, un dipôle cylindrique ou multipôle d'ordre 1. Il est caractérisé par un moment dipolaire complexe p_1 . Plus généralement, en approchant deux multipôles cylindriques d'ordre n de moments opposés, nous obtenons, lorsque la distance tend vers zéro, un multipôle cylindrique d'ordre $n+1$, caractérisé par un moment multipolaire d'ordre $n+1$, qui est un nombre complexe p_{n+1} .

Le potentiel complexe [8, p. 203] produit par le multipôle cylindrique d'ordre $n \geq 1$ est

$$\zeta = \frac{p_n}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{[(x - x_0) + i(y - y_0)]^n} \quad (\text{C-13})$$

où p_n est le moment multipolaire complexe d'ordre n du multipôle, au point (x_0, y_0) .

C.4 Potentiel prenant une valeur donnée sur un cylindre donné

Définissons un cylindre parallèle à l'axe Oz par une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (\text{C-14})$$

où t est un paramètre réel sans dimension. Nous cherchons le potentiel complexe produit par ce cylindre chargé seul dans l'espace. En certains points $x + iy$ de \mathbb{C} , ceux qui sont sur la section droite du cylindre, nous pouvons donc associer un t réel. Supposons que nous puissions prolonger

les fonctions f et g réelles de la variable réelle t en des fonctions réelles d'une variable complexe, telles que $f+ig$ soit analytique, et qu'à tout point $x + iy$ de \mathbb{C} , nous puissions associer un unique t complexe.

Nous pouvons alors définir un potentiel complexe ζ avec l'équation suivante donnant les coordonnées x et y d'un point de potentiel complexe donné :

$$x + iy = f\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) + ig\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) \quad (\text{C-15})$$

où V_0 est un potentiel réel arbitraire souhaité sur le cylindre, et où V_N est un potentiel réel arbitraire permettant une normalisation. En effet :

1) le fait que $f+ig$ soit analytique garantit que ζ est analytique, donc une solution de l'équation de Laplace,

2) sur le cylindre défini par (C-14), $i\zeta + iV_0$ est réel, donc le potentiel vérifie $V = V_0$.

Le cylindre équipotentiel peut être vu comme un cylindre conducteur. La charge linéique totale qu'il porte Q est donc liée à la fonction flux $V_N t$ sur le cylindre par

$$V_N = \frac{Q}{\epsilon_0(t_2 - t_1)} \quad (\text{C-16})$$

où t_2 et t_1 sont des valeurs réelles du paramètre t permettant de faire une fois le tour du cylindre. Il est important de noter que d'éventuelles singularités de f ou de g détermineront des potentiels complexes différents [10, pp. 240], puisque ces singularités correspondent à des sources.

Comme premier exemple, nous pouvons considérer un cylindre de révolution de rayon a , dont l'axe coupe le plan au point de coordonnées (x_0, y_0) , pour lequel (C-14) et (C-15) deviennent :

$$\begin{cases} x = a \cos t + x_0 \\ y = a \sin t + y_0 \end{cases} \quad (\text{C-17})$$

et

$$x + iy = a \cos\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) + ia \sin\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) + x_0 + iy_0 \quad (\text{C-18})$$

d'où

$$x + iy = a \exp\left(\frac{-\zeta + V_0}{V_N}\right) + x_0 + iy_0 \quad (\text{C-19})$$

En utilisant (C-16), il vient

$$\zeta = V_0 - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{a} \quad (\text{C-20})$$

En comparant avec (C-11), nous voyons qu'il s'agit du potentiel complexe d'un monopôle cylindrique.

Comme second exemple, nous pouvons considérer un cylindre elliptique, dont la section droite est une ellipse de demi-grand axe a , de demi-petit axe b , et de centre de coordonnées (x_0, y_0) , pour lequel (C-14) et (C-15) deviennent :

$$\begin{cases} x = a \cos t + x_0 \\ y = b \sin t + y_0 \end{cases} \quad (\text{C-21})$$

et

$$x + iy = a \cos\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) + ib \sin\left(\frac{i\zeta - iV_0}{V_N}\right) + x_0 + iy_0 \quad (\text{C-22})$$

d'où

$$x + iy = a \cosh\left(\frac{\zeta - V_0}{V_N}\right) - b \sinh\left(\frac{\zeta - V_0}{V_N}\right) + x_0 + iy_0 \quad (\text{C-23})$$

Il existe un unique α réel positif sans dimension tel que

$$\cosh \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{et} \quad \sinh \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (\text{C-24})$$

et nous avons

$$x + iy = \sqrt{a^2 - b^2} \cosh\left(\frac{\zeta - V_0}{V_N} - \alpha\right) + x_0 + iy_0 \quad (\text{C-25})$$

En utilisant (C-16), et comme il est manifeste que le potentiel doit décroître lorsque l'on s'éloigne d'un cylindre chargé positivement, il vient

$$\zeta = V_0 + \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \left(\alpha - \arg \cosh \frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \quad (\text{C-26})$$

C.5 Utilisation de transformations conformes

Pour un cylindre parallèle à Oz de forme ne se prêtant pas directement à la méthode du paragraphe précédent pour déterminer le potentiel complexe produit par ce cylindre chargé seul dans l'espace, il est possible d'utiliser une transformation conforme.

Une transformation ponctuelle [17, § 28-5] du plan correspondant à une fonction f holomorphe dans un domaine \mathcal{D} , dont la dérivée ne s'annule en aucun point de \mathcal{D} , conserve les angles dans ce domaine. C'est par définition une transformation conforme de \mathcal{D} .

Considérons, dans le plan complexe P des points $X + iY$, un potentiel complexe ζ , et le bord ∂C d'un conducteur, qui est une équipotentielle. Dans le plan complexe $f(P)$ des points $x + iy = f(X + iY)$, le potentiel complexe $\zeta \circ f^{-1}$ admet bien la courbe $f(\partial C)$ comme équipotentielle. Cette courbe peut donc être considérée comme le bord d'un conducteur $f(\partial C)$. On montre que ces deux potentiels complexes [10, p. 246] correspondent aux mêmes densités surfaciques de charge en un point de C et en l'image de ce point sur $f(\partial C)$.

Nous disposons donc d'un moyen de transformer la solution d'un problème d'électrostatique en celle d'un autre, si nous disposons d'une fonction holomorphe faisant correspondre les bords des conducteurs.

C.6 Utilisation d'une transformation de Schwarz-Christoffel

Pour un cylindre parallèle dont la section droite est un polygone, il existe des transformations conformes pouvant être utilisées pour déterminer le potentiel complexe produit par ce cylindre chargé seul dans l'espace. Elle utilisent des transformations de Schwarz-Christoffel.

Il faut ici noter que nous ne sommes pas intéressés par les transformations de Schwarz-Christoffel faisant correspondre le demi-plan supérieur avec l'intérieur d'un polygone, mais par celles faisant correspondre le demi-plan supérieur avec l'extérieur d'un polygone qui sont plus délicates à manipuler [5, p. 447] [10, p. 278]. En particulier, nous choisissons de nous intéresser à celles de ces transformations qui font correspondre le point $X + iY = i$ avec le cercle à l'infini dans le plan des points $x + iy$. Ces transformations conformes sont de la forme :

$$x + iy = A \int_0^{X+iY} \frac{\prod_{k=1}^n (t - \xi_k)^{\frac{\alpha_k}{\pi} - 1}}{(t^2 + 1)^2} dt + B \quad (C-27)$$

où les α_k sont les angles extérieurs (non orientés) du polygone, où les ξ_k sont des nombres réels, et où A et B sont des nombres complexes. Par cette transformation, les points $X + iY = \xi_k$ correspondent aux angles du polygone.

Ces transformations sont telles que si nous plaçons un monopôle cylindrique en $X + iY = i$, nous obtenons dans le plan $x + iy$ un polygone chargé, seul dans l'espace.

C.7 Utilisation d'une inversion analytique

L'inversion analytique [10, p. 250] est la transformation conforme

$$x + iy = \frac{k^2}{X + iY} \quad (\text{C-28})$$

où k est une longueur (réelle) arbitraire. Cette transformation laisse globalement invariant le cercle de centre 0 et de rayon k , mais chaque point de ce cercle est transformé en son symétrique par rapport au plan $Y = 0$ qui est aussi le plan $y = 0$. Elle fait passer ce qui était à l'intérieur de ce cercle, à l'extérieur et inversement.

Cette transformation conforme a une utilisation un peu particulière. Imaginons qu'un cylindre de révolution conducteur, centré sur l'axe Oz , de rayon a est soumis à un potentiel complexe $\zeta_0(x+iy)$ créé par des sources extérieures, en tout point $x+iy$. Soit $\zeta_R(x+iy)$ le potentiel complexe créé par des sources symétriques par rapport au plan $y = 0$ de celles qui créent le potentiel complexe $\zeta_0(x+iy)$. Considérons [10, p. 220] le potentiel complexe $\zeta(x+iy)$ défini par

$$\zeta(x + iy) = \zeta_0(x + iy) - \zeta_R\left(\frac{a^2}{x + iy}\right) - \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{x + iy}{a} \quad (\text{C-29})$$

où Q est la charge du conducteur. Ce potentiel complexe a une partie réelle (le potentiel) nul sur le cylindre de révolution, et constitue donc la solution cherchée pour le potentiel complexe à l'extérieur du cylindre. Nous notons que si le potentiel complexe $\zeta_0(x+iy)$ a sa partie réelle symétrique par rapport au plan $y = 0$, alors $\zeta_0(x+iy) = \zeta_R(x+iy)$, ce qui simplifie (C-29).

Traisons par exemple le problème d'un cylindre de révolution conducteur de rayon a dans un champ uniforme E_0 selon l'axe Ox . Nous avons évidemment $\zeta_0(x+iy) = -(x+iy) E_0$. Pour un cylindre non chargé, le potentiel complexe est donc

$$\zeta = \left(\frac{a^2}{x + iy} - x - iy \right) E_0 \quad (\text{C-30})$$

d'où le champ complexe

$$E = \left(1 - \frac{a^2}{(x + iy)^2} \right) E_0 \quad (\text{C-31})$$

et la densité surfacique de charge sur le cylindre conducteur

$$\sigma = \varepsilon_0 |E| = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \quad (\text{C-32})$$

Annexe D : A propos de linéarité

D.1 Les trois linéarités

Considérons une première quantité complexe $x = x_1 + x_2 i$ quelconque, avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et une seconde quantité complexe $y = y_1 + y_2 i$ quelconque, avec $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Si nous disons qu'il existe une relation linéaire entre y et x , nous laissons planer une certaine ambiguïté. En effet, \mathbb{C} étant un \mathbb{R} -espace vectoriel, nous pouvons faire référence à une \mathbb{R} -linéarité entre x et y , qui est par exemple décrite avec la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ par

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{D-1})$$

soit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D-2})$$

Par ailleurs, \mathbb{C} étant aussi un \mathbb{C} -espace vectoriel, nous pouvons faire référence à une \mathbb{C} -linéarité entre x et y , qui est par exemple décrite par un nombre complexe $a = a_1 + a_2 i$ tel que $y = ax$. Evidemment, la \mathbb{C} -linéarité implique la \mathbb{R} -linéarité, donc (D-1) et (D-2) s'appliquent. Nous constatons toutefois que la matrice \mathbf{A} ne dépend ici que des deux réels indépendants a_1 et a_2 , et que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D-3})$$

Nous avons donc affaire à une similitude directe. Par conséquent, la \mathbb{C} -linéarité est une propriété bien plus forte que la \mathbb{R} -linéarité.

Considérons à présent deux quaternions quelconques, $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k}$ avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, et $y = y_1 + y_2 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} + y_4 \mathbf{k}$ avec $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Si nous disons qu'il existe une relation linéaire entre y et x , l'ambiguïté est plus grande encore que précédemment :

- si nous faisons référence à une \mathbb{R} -linéarité, elle dépend de 16 paramètres réels indépendants,
- si nous faisons référence à une \mathbb{C} -linéarité, elle dépend de 4 paramètres complexes indépendants, soit 8 paramètres réels indépendants,
- si nous faisons référence à une linéarité hypercomplexe, elle dépend d'un quaternion, soit 2 paramètres complexes indépendants, soit 4 paramètres réels indépendants.

Par conséquent, la linéarité hypercomplexe est une propriété plus forte que la \mathbb{C} -linéarité. Il est donc essentiel d'identifier la linéarité dont nous parlons.

D.2 La linéarité intervenant dans les problèmes d'écrantage

Dans le cas de milieux "linéaires", les problèmes d'électromagnétisme sont évidemment \mathbb{R} -linéaires, c'est-à-dire que les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ produits dépendent \mathbb{R} -linéairement des courants $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ et des charges $\rho(\mathbf{r}, t)$. Ce résultat découle de la forme des équations de Maxwell. Inversement, les relations constitutives des milieux impliquent que les courants $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ et charges $\rho(\mathbf{r}, t)$ autres que ceux des sources qui fournissent la puissance électromagnétique au système dépendent \mathbb{R} -linéairement des champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Discutons par exemple la première de ces dépendances \mathbb{R} -linéaire, quoique ce que nous allons dire s'applique également à la seconde..

Si, en plus d'être "linéaire", les milieux sont invariants dans le temps, ils n'interviennent que comme des constantes dans la transformée de Fourier nécessaire pour passer aux équations de Maxwell complexes. Dans ce cas, les problèmes d'électromagnétisme sont \mathbb{C} -linéaires, c'est-à-dire que, pour ω donné, les amplitudes complexes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ produites dépendent \mathbb{C} -linéairement des amplitudes complexes $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ et $\rho(\mathbf{r}, \omega)$.

Si, enfin, les milieux sont, de plus, invariants vis-à-vis de l'azimut, ils n'interviennent pas que comme des constantes dans la transformée de Fourier nécessaire pour passer aux équations de Maxwell hypercomplexes. Dans ce cas, les problèmes d'électromagnétisme ont la linéarité hypercomplexe, c'est-à-dire que, pour ω et n donnés, les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{E}_n(r, z, \omega)$ et $\mathbf{H}_n(r, z, \omega)$ produites dépendent linéairement des amplitudes hypercomplexes $\mathbf{j}_n(r, z, \omega)$ et $\rho_n(r, z, \omega)$, au sens de la linéarité hypercomplexe.

Par exemple, dans le problème du § 4.3, dans lequel le bord externe est de révolution et parfaitement conducteur, la linéarité hypercomplexe est acquise. Par contre, les conditions aux limites applicable au § 5.3, qui concernent l'écran réel, ne sont manifestement pas invariants vis-à-vis de l'azimut. Il n'y a donc pas de linéarité hypercomplexe dans ce cas.

D.3 Amplitudes hypercomplexes sans la linéarité hypercomplexe

Le fait qu'un problème ne présente pas d'invariance vis-à-vis de l'azimut ne nous interdit pas d'utiliser des amplitudes hypercomplexes. Par exemple, les constructions conduisant à (3-53) et (3-54) restent tout à fait valables. De même, les résultats obtenus au § 3.7 et au § 3.8, relatifs à un problème sans milieu et sans conditions aux limites, sont toujours valables.

Considérons donc un problème dans lequel nous avons seulement la \mathbb{C} -linéarité indiquée au § D.2. Supposons que les amplitudes hypercomplexes ont été définies comme au § 3.7, mais, pour changer, sans transformée de Fourier par rapport à z . Manifestement, pour ω et pour n donnés, les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{E}_n(r, z, \omega)$ et $\mathbf{H}_n(r, z, \omega)$ produites dépendent \mathbb{C} -linéairement des amplitudes complexes $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ et $\rho(\mathbf{r}, \omega)$, la multiplication des quantités complexes par un complexe λ correspondant à la multiplication à gauche des quantités hypercomplexes par λ . Comme nous parlons de \mathbb{C} -linéarité, une amplitude hypercomplexe x est évidemment vue comme composée de deux amplitudes complexes, par exemple $\text{Co}_j(x)$ et $\text{Co}_j(-\mathbf{i}x)$.

D'autre part, les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{j}_n(r, z, \omega)$ et $\rho_n(r, z, \omega)$ qui peuvent être définies dépendent \mathbb{C} -linéairement des amplitudes complexes $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ et $\rho(\mathbf{r}, \omega)$. Il y a donc une dépendance \mathbb{C} -linéaire entre les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{E}_n(r, z, \omega)$ et $\mathbf{H}_n(r, z, \omega)$ d'une part, et les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{j}_n(r, z, \omega)$ et $\rho_n(r, z, \omega)$ d'autre part. Nous voyons par conséquent que, si une précision satisfaisante peut être obtenue avec un nombre fini de valeurs de n , en traitant chaque amplitude hypercomplexe comme deux amplitudes complexes, la relation entre champs d'une part et courants et charges d'autre part peut s'écrire sous la forme d'une matrice complexe, en décomposant chaque amplitude hypercomplexe en deux amplitudes complexes. C'est une représentation de ce type qui est utilisée dans la définition de la matrice d'écrantage, au § 5.3.

Il peut également advenir que nous soyons intéressés par une quantité indépendante de l'azimut, par exemple la valeur d'un champ en un point. Supposons que cette quantité soit l'amplitude complexe $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, \omega)$ au point \mathbf{r}_0 . Il y a donc une dépendance \mathbb{C} -linéaire entre cette amplitude complexe et les amplitudes hypercomplexes $\mathbf{j}_n(r, z, \omega)$ et $\rho_n(r, z, \omega)$. Il est facile de vérifier que la forme la plus générale d'une telle dépendance est l'image par Co_j d'une dépendance linéaire, au sens de la linéarité hypercomplexe. Nous voyons par conséquent que, si une précision satisfaisante peut être obtenue avec un nombre fini de valeurs de n , $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, \omega)$ est l'image par Co_j du produit d'une matrice hypercomplexe avec le vecteur des $\mathbf{j}_n(r, z, \omega)$ et $\rho_n(r, z, \omega)$. C'est une représentation de ce type qui est utilisée pour définir les performances d'écrantage des câbles, au § 5.5 et au § 5.6.

Analyse des propriétés électromagnétiques des écrans cylindriques, et application à la caractérisation de l'efficacité de blindage des câbles

Résumé

La caractérisation d'un câble coaxial présentant une symétrie de révolution parfaite, à l'aide de deux paramètres complexes dépendant de la fréquence, ne peut être directement transposée à des câbles ne présentant pas la symétrie de révolution. Nous justifions qu'il est en première approximation suffisant de retenir cinq principaux types de couplage pour caractériser le comportement d'un câble multiconducteur blindé soumis à l'action de sources extérieures. Pour cette démonstration, nous avons construit une classification des réponses d'un écran généralisé cylindrique excité par des sources extérieures, puis une classification des excitations possibles. Sur la base de cette dernière, nous avons pu définir rigoureusement la matrice d'écrantage le long d'un écran cylindrique, et les sources de tension et de courant équivalentes aux champs dans le cas d'un câble multiconducteur blindé. Par ailleurs, en utilisant la réciprocité, nous avons constaté que cette méthode de caractérisation nous permettait de déterminer l'émission d'un écran cylindrique ou d'un câble par un développement en ondes cylindriques. Sur le plan expérimental, nous avons procédé à des mesures locales et à des mesure globales, qui nous ont notamment permis de déterminer les paramètres caractérisant les performances d'écrantage d'un câble multiconducteur pourvu d'un écran à simple tresse. Enfin, les essais d'illumination globale nous ont permis de mettre en évidence une configuration précise dans laquelle les couplages de type 3 et de type 5 jouent un rôle aussi important que le couplage de type 1, auquel se limitent encore de nombreuses analyses.

MOTS CLÉS :

Blindage, Écran électromagnétique, Câble blindé, Réponse standard, Excitation standard, Impédance de transfert, Type de couplage, Quaternion.